华教杯全国大学生数学竞赛
HUA JIAO BEI QUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI

# 2023 年第六届华教杯全国大学生数学竞赛

## 初赛试题（非数学类专业组）

☆ 注 意 事 项 ☆

1．参赛对象：全国在校大学生（包括本科生，研究生及专科生）均可报名参赛

2．竞赛官网：www.cecmath.com

3．竞赛组别：非数学类专业组、数学类专业组、专科生组

4．因试题整理时间有限，如在使用过程中发现编辑、题目错误等情况，请与我们联系修正。

5．联系电话：13248083435（微信同号）；联系QQ：3007715383

竞赛官网　　微信公众号　　参赛咨询微信

## 一、选择题（10 题、3 分/题）

1．已知 $\alpha(x)=\frac{1-x}{1+x}$，$\beta(x)=3-3\sqrt[3]{x}$，则当 $x\to 1$ 时（　　）.

A．$\alpha(x)$ 是关于 $\beta(x)$ 的 2 阶无穷小

B．$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是高阶无穷小

C．$\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是等价无穷小

D．$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小，但不是等价无穷小

2．$\int e^x(\frac{1-x}{1+x^2})^2dx=$（　　）.

A．$\frac{e^x}{1+x}+C$　　B．$\frac{e^x}{1+x^2}+C$　　C．$\frac{2e^x}{1+x^2}+C$　　D．$\frac{e^x}{1+2x^2}+C$

3．$\int e^x[(\sin x-\cos x)\cos\frac{n\pi}{2}+(\cos x+\sin x)\sin\frac{n\pi}{2}]dx=$（　　）.

A．$e^x\cos(x+\frac{n\pi}{2})+C$　　B．$-e^x\cos(x+\frac{n\pi}{2})+C$

C．$-e^x\tan(x+\frac{n\pi}{2})+C$　　D．$-e^x\tan(x+n\pi)+C$

华教杯全国大学生数学竞赛
HUA JIAO BEI QUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI

4．$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i^2+j^2}=$（　　）.

A．$\frac{2}{\pi}+\ln 2$　　B．$\frac{\pi}{2}+\ln 2$　　C．$\frac{2}{\pi}+\ln 3$　　D．$\frac{\pi}{2}+\ln 3$

5．$\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\sin(2x)}dx=$（　　）.

A．$n$　　B．$\sqrt{2}n$　　C．$\sqrt{3}n$　　D．$2\sqrt{2}n$

6．$\lim\limits_{n\to\infty}(1+n+n^2)^{\frac{1}{n}}=$（　　）.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

7. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x dx=$（　　）.

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{8}$

8. $x^2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx, -\pi\le x\le\pi, a_2=$（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

9. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)=$（　　）.

A. ln2　　B. ln3　　C. $\frac{1}{\ln 2}$　　D. $\frac{1}{\ln 3}$

10. 设 $D=R^2$，$a>0$，$ac-b^2>0$，$I=\iint_D\frac{dxdy}{(p+ax^2+2bxy+cy^2)^2}(p>0)=$（　　）.

A. $\frac{\pi}{p\sqrt{ac-b^2}}$　　B. $\frac{\pi}{p\sqrt{ac-b}}$　　C. $\frac{\pi^2}{p\sqrt{ac-b}}$　　D. $\frac{\pi}{p^2\sqrt{ac-b}}$

华教杯全国大学生数学竞赛
HUA JIAO BEI QUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI

## 二、填空题（7 题、4 分/题）

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sec(\tan x)-\sec(\sin x)}{\cos x^2-1}=$________.

2. $\int\frac{e^x(1+x)}{(1-xe^x)^2}dx=$________.

3. 点 $M_0(2,2,2)$ 关于直线 $L:\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{2}=z-3$ 的对称点 $M_1$ 的坐标为________.

4. $\iint_D(x-y^2)(y-x^2)(1-4xy)dxdy=$________. 其中 $D: y=\sqrt{x}; x=\sqrt{y}$ 及

$x^2+y^2-x-y=\frac{1}{4}$. $x,y\in(0,\frac{1}{2})$所围成的区域.

5．正方形的边长 L 以 2m/s 的速度增大，当 L=4m 时，其内接圆的面积的变化速率为________.

6．$\sin^{(2023)}\left(\frac{\pi}{6}\right)=$________.

7．设 $x_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{x_n}=$________.

## 三、解答题（3 题、14 分/题）

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上具有连续导数，若 $\lambda$，$\mu$ 为实数且 $\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\lambda(b^2-a^2)+\mu(b-a)$，$\int_a^b xf(x)dx=\frac{1}{3}\lambda(b^3-a^3)+\frac{1}{2}\mu(b^2-a^2)$，证明：存在 $\xi\in(a，b)$，使得 $f'(\xi)=\lambda$.

华教杯全国大学生数学竞赛
HUA JIAO BEI QUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI

2．若 $f_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$，其中 $n$ 为自然数，求方程 $f_n(x)f_{n+1}(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内实根的个数.

3．曲线 $y=\sin x, x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$ 绕 $y$ 轴旋转一周，求所得几何体的体积.

# 参 考 答 案

## 一、选择题

1、D　　2、B　　3、B　　4、B　　5、D

6、B　　7、D　　8、B　　9、C　　10、A

## 二、填空题

1、$-1$　　2、$\dfrac{1}{1-xe^{x}}+C$　　3、$(6,-6,6)$　　4、$\dfrac{1}{6144}$

5、$4\pi$　　6、$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　7、1

## 三、解答题

1、【参考解析】

考虑积分 $\int_a^b (x-a)(b-x)(\lambda-f^{'}(x))dx$，

利用分布积分及 $\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\lambda(b^2-a^2)+\mu(b-a)$，$\int_a^b xf(x)dx=\frac{1}{3}\lambda(b^3-a^3)+\frac{1}{2}\mu(b^2-a^2)$，

有 $\lambda\int_a^b (bx+ax-ab-x^2)dx-(x-a)(b-x)f(x)\Big|_a^b+\int_a^b (b+a-2x)f(x)dx$

$=\frac{\lambda}{6}(b-a)^3+(a+b)\int_a^b f(x)dx-2\int_a^b xf(x)dx$

$=\frac{\lambda}{6}(b-a)^3+(a+b)(\frac{1}{2}\lambda(b^2-a^2)+\mu(b-a))-2(\frac{1}{3}\lambda(b^3-a^3)+\frac{1}{2}\mu(b^2-a^2))=0$

由积分中值定理知，存在 $\xi\in(a，b)$，使得 $f^{'}(\xi)=\lambda$.

2、【参考解析】

由题设知 $f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，

当 $n$ 为偶数时，$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=+\infty, \lim\limits_{n\to-\infty} f_n(x)=-\infty,$ 故 $f_n(x)$ 存在极小点 $x_0$，

则由 $f_n(x_0)=f_n'(x_0)+\dfrac{x_0^n}{n!}=\dfrac{x_0^n}{n!}$, 又 $f_n(0)=1,$ 从而 $f_n(x)>0,$ 即 $f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无实根.

当 $n$ 为奇数时，$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=+\infty, \lim\limits_{n\to-\infty} f_n(x)=-\infty,$ 知 $f_n(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有实根.

华教杯全国大学生数学竞赛
HUA JIAO BEI QUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI

由 $f_n'(x)=f_{n-1}(x)$, 而 $n-1$ 为偶数，则 $f'(x)>0$，知 $f_n(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 严格单增，故其有唯一实根.

从而 $f_n(x)$ $f_{n+1}(x)$ 无论 $n$ 为奇数还是偶数，它在 $(-\infty,+\infty)$ 内有唯一实根.

3、【参考解析】

曲线 $y=\sin x,x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$ 的反函数为 $x=\pi-\arcsin y,y\in[0,1]$，

所以所得几何体的体积为：$V=\int_0^1\pi(\pi-\arcsin y)^2dy$，设 $\arcsin y=u$,即 $y=\sin u$,则

$$V=\int_0^1\pi(\pi-\arcsin y)^2dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi(\pi-u)^2\cos udu=\frac{\pi}{4}(\pi^2+8\pi-8)\ .$$

华教杯全国大学生数学竞赛
HUA JIAO BEI QUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI