



华教杯全国大学生数学竞赛
HUA JIAO BEI GUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SA

2023 年第六届华教杯全国大学生数学竞赛

初赛试题（专科生组）

☆ 注 意 事 项 ☆

1. 参赛对象：全国在校大学生（包括本科生，研究生及专科生）均可报名参赛
2. 竞赛官网：www.cecmath.com
3. 竞赛组别：非数学类专业组、数学类专业组、专科生组
4. 因试题整理时间有限，如在使用过程中发现编辑、题目错误等情况，请与我们联系修正。
5. 联系电话：13248083435（微信同号）；联系QQ：3007715383



竞赛官网



微信公众号



参赛咨询微信

一、选择题 (10 题、3 分/题)

1. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(\sin x) = 2 + \cos(2x)$, 则 $f(x) = (\quad)$.

- A. $2 + 3x^2$ B. $2 - 3x^2$ C. $3 + 2x^2$ D. $3 - 2x^2$

2. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x) - f(0)] \sin 3x}{x^2} = 4$, 则 $f'(0) = (\quad)$.

- A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

3. $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx = (\quad)$.

- A. $x \tan \frac{x}{2} + C$ B. $x \tan x + C$ C. $\frac{x}{2} \tan x + C$ D. $2x \tan x + C$

4. $\int e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx = (\quad)$.

- A. $xe^{\sin x} - \frac{1}{\cos x} e^{\sin x} + C$ B. $xe^{\sin x} + \frac{1}{\cos x} e^{\sin x} + C$
C. $xe^{\sin x} - \cos x e^{\sin x} + C$ D. $xe^{\sin x} - \frac{1}{\cos x} e^{\cos x} + C$

5. 方程 $2e^{2-x^2}(x^6 - 3x^4 + 5x^2 - 1) - 2e - 5 = 0$ 解的个数为 $(\quad)$.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

6. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx (b > a > 0) = (\quad)$.

- A. $\sqrt{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a})$ B. $\sqrt{\pi}(\sqrt{b} + \sqrt{a})$ C. $\pi(\sqrt{b} - \sqrt{a})$ D. $\sqrt{\pi}(\sqrt{a} - \sqrt{b})$

7. $f(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, -\infty < x < +\infty$ 的水平渐近线的个数为 $(\quad)$.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

8. 已知 $-\infty < x < +\infty$, $\arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = (\quad)$.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

9. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{nx^2+1}$ 的间断点是 $x = (\quad)$.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \frac{1}{\sqrt{n}})^{n\pi} = (\quad)$.

- A. $e^{-\frac{\pi}{2}}$ B. e^{-1} C. e D. $e^{-\frac{1}{2}}$

二、填空题 (7 题、4 分/题)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x - \sin x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2023+3x)^x - 2023^x}{x(e^x+1)\ln(1+\sin x)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设 $f'(x^5) = 5\ln x$, 则函数 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^3}{nx^5+2}$, 则 $f(x)$ 的间断点为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 设 m, n 为正整数, 则 $\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 不定积分 $\int \frac{e^{-\sin x} \sin 2x}{(1-\sin x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设 $f(x) = \frac{\ln x}{(1+x)^2} + \frac{1+x^2}{1+x^4} \int_1^{+\infty} f(x) dx$, 且 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则 $\int_1^{+\infty} f(x) dx =$ _____.

三、解答题 (3 题、14 分/题)

1. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = 1$, 当 $x \geq 1$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$, 证明: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在.

2. 求函数 $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{a^2 - x^2}, & -a \leq x \leq a \\ (x-a)^2, & a < x \leq 2a \end{cases}$ 的值域, 其中常数 $a > 0$.

华教杯全国大学生数学竞赛

HUA JIAO BEI QUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI

3. 求 $2^{\frac{1}{5}}$ 的近似值 (精确到 0.0001).

参 考 答 案

一、选择题

- 1、D 2、C 3、A 4、A 5、D
6、A 7、C 8、A 9、A 10、A

二、填空题

- 1、-2 2、 $\frac{3}{4046}$ 3、 $f(x) = x \ln x - x + c$ 4、0
5、 $(-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$ 6、 $\frac{2e^{-\sin x}}{1 - \sin x} + C$ 7、 $\frac{4 \ln 2}{4 - \sqrt{2}\pi}$

三、解答题

1、【参考解析】

由微积分基本公式，有 $f(x) - f(1) = \int_1^x f'(x) dx$ ，

由题设知， $f'(x) > 0$ ，故 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数，

又 $f(1) = 1$ ，故当 $x \geq 1$ 时， $f(x) \geq 1$ ，

$$\text{所以 } f(x) - f(1) = \int_1^x f'(x) dx = \int_1^x \frac{1}{x^2 + f^2(x)} dx \leq \int_1^x \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan x \Big|_1^x$$

$$= \arctan x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

即 $f(x)$ 单调增有上界 $1 + \frac{\pi}{4}$ ，故 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在。

2、【参考解析】

容易看出函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-a, 2a]$ 上连续，

$$\text{在 } (-a, a) \text{ 内 } f'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

在 $(a, 2a)$ 内, $f'(x) = 2(x-a)$, 因为 $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x\sqrt{a+x}}{-\sqrt{a-x}} = -\infty$,

所以 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处不可导, 于是函数在 $(-a, 2a)$ 内有驻点 $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}a$ 和不可导点 $x = a$. 计算函数

数在区间端点、驻点以及不可导点的函数值得

$$f(-a) = 0, f(2a) = a^2, f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = -\frac{1}{2}a^2, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = \frac{1}{2}a^2, f(a) = 0$$

比较这些值得到函数的最小值为 $-\frac{1}{2}a^2$, 最大值为 a^2 . 因此函数的值域为 $\left[-\frac{1}{2}a^2, a^2\right]$.

3、【参考解析】

$$2 = \left(\frac{6}{5}\right)^5 - \left[\left(\frac{6}{5}\right)^5 - 2\right] = \left(\frac{6}{5}\right)^5 \left(1 - \frac{1526}{6^5}\right)$$

取 $x = \frac{1526}{6^5} = 0.1962449\cdots$, 由泰勒公式

$$2^{\frac{1}{5}} = \frac{6}{5}(1-x)^{\frac{1}{5}} = \frac{6}{5}\left(1 - \frac{1}{5}x - \frac{8}{100}x^2 - \frac{6}{125}x^3 - \cdots\right)$$

解得 $2^{\frac{1}{5}} = 1.1487686\cdots$

$$\text{误差 } |R_3(x)| \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{14}{5} (1-x)^{\frac{4}{5}} x^4 < \frac{21}{125} x^4 = 0.0002492\cdots$$