



华教杯全国大学生数学竞赛
HUA JIAO BEI GUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SA

2023 年第六届华教杯全国大学生数学竞赛

初赛试题（数学类专业组）

☆ 注 意 事 项 ☆

1. 参赛对象：全国在校大学生（包括本科生，研究生及专科生）均可报名参赛
2. 竞赛官网：www.cecmath.com
3. 竞赛组别：非数学类专业组、数学类专业组、专科生组
4. 因试题整理时间有限，如在使用过程中发现编辑、题目错误等情况，请与我们联系修正。
5. 联系电话：13248083435（微信同号）；联系QQ：3007715383



竞赛官网



微信公众号



参赛咨询微信

一、选择题 (10 题、3 分/题)

1. 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x + b}{x-1}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续, 则 ().

- A. $a=4, b$ 可取任意实数 B. $b=-3, a$ 可取任意实数
C. a, b 都可能取任意实数 D. $a=4, b=-3$

2. $\int e^x(x^5 - 20x^3)dx = ().$

- A. $e^x(x^5 - 5x^4) + C$ B. $e^x(x^5 + 5x^4) + C$
C. $e^x(x^4 - 4x) + C$ D. $e^x(x - x^4) + C$

3. $\lim_{\substack{i \rightarrow +\infty \\ j \rightarrow +\infty}} \sum_{n=1}^i \sum_{m=1}^j \frac{1}{(4n-1)^{2m+1}} = ().$

- A. $-\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{8}$ B. $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{8}$ C. $2 \ln 2 + \frac{\pi}{8}$ D. $\ln 2 + \frac{\pi}{8}$

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \min\{x, y\} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = ().$

- A. $-\sqrt{\pi}$ B. $\sqrt{\pi}$ C. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ D. $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

5. 设 $y = y(x), \begin{cases} x = 2t + |t| \\ y = 5t^2 + 4t|t| \end{cases}$, 则 $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=0} = ().$

- A. 0 B. 1 C. $\frac{\pi}{3}$ D. 2

6. 若 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2$ 位于平面 $z=1$ 下方的部分, 则 $\iint_{\Sigma} |z| dS = ().$

- A. $\frac{\pi}{60}(25\sqrt{5}+1)$ B. $\frac{\pi}{8}(25\sqrt{5}+1)$ C. $\frac{\pi}{60}(5\sqrt{5}+1)$ D. $\frac{\pi}{6}(25\sqrt{5}+1)$

7. 若 $f(x)$ 是可导函数, $f(0)=0$, $F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n) dt$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2n}} = ().$

- A. $\frac{1}{n}f'(0)$ B. $\frac{1}{2n}f'(0)$ C. $f'(0)$ D. 0

8. 已知 $m, n > 0$, 且 $m + 2n = 2$, 则 $\frac{m^3 + 8n^3}{2mn}$ 的最小值为 ().

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

9. 已知 $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_n = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_{n-1}}$, $n \geq 2$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n x_k = ()$.

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{2}{\pi}$ D. $\frac{4}{\pi}$

10. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$, $B = (2A + E)(A + 2E)^{-1}$, 则 $|B - 2E|$ 中所有元素的代数余子

式之和为 ().

- A. $-\frac{1}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

华教杯全国大学生数学竞赛

HUA JIAO BEI QUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI

二、填空题 (7 题、4 分/题)

1. 若 $a > 0$, 且 $\int_0^a x \sin x dx = b$, 则 $\int_{-a}^a x(\sin x - \cos x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $2023^x - 2022$, $\int f''(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足方程 $\int_0^{2x} xf(t)dt + 2\int_x^0 tf(2t)dt = 2x^3(x-1)$,

则函数 $f(x)$ 的驻点为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 周期为 2 的函数 $f(x)$ 在一个周期内的表达式为 $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0.5 \\ x, & 0.5 < x < 1 \end{cases}$, 则它的傅里叶级数在

$x = -3.5$ 处的和为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

5. 级数求和, $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2 + 3n + 3} = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 已知 $u_n(x)$ 满足 $u_n'(x) - u_n(x) = \frac{e^x(n-1)x^{n-2}}{n}$, n 为非负整数, 且 $u_n(1) = \frac{e}{n}$, 则求函数项级数

的和, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 设 $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, 则 $I = \iint_D (x+1)e^{4-x^2-y^2} dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题 (3 题、14 分/题)

1. 设 $\{a_n\}$ 为非负数列, $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $I_n(m) = \int_0^1 \frac{(S_n(x))^{m+1}}{(S_{n+1}(x))^m} dx$, 若对正数 α , 实数 β , 有极

限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha (\ln n)^\beta a_n = l$, 证明: 对实数 $m \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}.$

华教杯全国大学生数学竞赛
HUA JIAO BEI QUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI

2. 若 A 是对角线元素为 0 的四阶实对称可逆矩阵, I 为四阶单位矩阵, 又

$$B = \text{diag}\{0, 0, k, l\} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & k & \\ & & & l \end{pmatrix} \text{ 这里 } (k > 0, l > 0).$$

(1) 试计算 $I + AB$, 且指出 A 中元素满足何条件时, $I + AB$ 为可逆矩阵.

(2) 当 $I + AB$ 为可逆矩阵时, 试证明 $(I + AB)^{-1}A$ 为对称矩阵.

3. 一桶中盛有 100 公斤水, 以每分钟 1 公斤的速率注入浓度为 0.1 的盐水且不停地搅拌, 同时以同样的速率排出搅拌后的盐水, 那么经过多长时间后, 桶内的含盐量达到 5 公斤? (附: $\ln 2 \approx 0.6931$)



华教杯全国大学生数学竞赛

HUA JIAO BEI QUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI

参 考 答 案

一、选择题

- 1、D 2、A 3、A 4、D 5、A
6、A 7、B 8、B 9、C 10、B

二、填空题

- 1、 $2b$ 2、 $2023^x(\ln 2023)^2 + C$ 3、 $\frac{1}{2}$ 4、0.75
5、 $\arctan \frac{1}{2}$ 6、 $\begin{cases} -\frac{e^x \ln(1-x)}{x}, & [-1,0) \cup (0,1) \\ 1, & x=0 \end{cases}$ 7、 $\pi(e^3 - 1)$

三、解答题

1、【参考解析】

对 $x \in [0,1]$ ，注意到 $0 \leq \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{S_{n+1}(x)} \leq 1$ ，由 $(1-x)^m \geq 1-mx$ ，有

$$\frac{(S_n(x))^{m+1}}{(S_{n+1}(x))^m} = S_n(x) \left(1 - \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{S_{n+1}(x)}\right)^m \geq S_n(x) \left(1 - \frac{ma_{n+1}x^{n+1}}{S_{n+1}(x)}\right). \text{ 于是}$$

$$0 \leq S_n(x) - \frac{(S_n(x))^{m+1}}{(S_{n+1}(x))^m} \leq ma_{n+1}x^{n+1} \frac{S_n(x)}{S_{n+1}(x)} \leq ma_{n+1}x^{n+1}, \text{ 从而得}$$

$$0 \leq \int_0^1 S_n(x) - I_n(m) \leq m \cdot \frac{a_{n+1}}{n+2} = m \cdot \frac{(n+1)^\alpha (\ln(n+1))^\beta a_{n+1}}{(n+1)^\alpha (\ln(n+1))^\beta (n+2)} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

由条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha (\ln n)^\beta a_n = l$ 知，当 $n \rightarrow \infty$ 时，有 $\frac{a_n}{n+1} \sim \frac{l}{n^{\alpha+1} (\ln n)^\beta}$ ，于是由正项级数得比较判别

法及 $\sum \frac{1}{n^{\alpha+1} (\ln n)^\beta}$ 收敛得到 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$ 收敛，其中用到极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1+\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{n^{\alpha+1} (\ln n)^\beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}} (\ln n)^\beta} = 0. \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}.$$

2、【参考解析】

(1) 若设 $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$, 则由 A 的对角线元素为 0 且 $A^T = A$ 有:

$$I + AB = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & k & \\ & & & l \end{pmatrix}$$

(将后面矩阵 A, B 皆按虚线分块再相乘)

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & ka_{13} & la_{14} \\ 0 & 0 & ka_{23} & la_{24} \\ 0 & 0 & 0 & la_{34} \\ 0 & 0 & ka_{34} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ka_{13} & la_{14} \\ 0 & 1 & ka_{23} & la_{24} \\ 0 & 0 & 1 & la_{34} \\ 0 & 0 & ka_{34} & 1 \end{pmatrix}$$

由分块矩阵行列式公式有 $|I + AB| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & la_{34} \\ ka_{34} & 1 \end{vmatrix} = 1 - kla_{34}^2$,

故当 $a_{34} \neq \frac{1}{\sqrt{kl}}$ 时, $I + AB$ 为可逆矩阵.

(2) 注意到下面式子运算:

$$[(I + AB)^{-1}A]^T = A^T[(I + AB)^{-1}]^T = A[(I + AB)^T]^{-1} = A(I + B^T A^{-1})^{-1}$$

$$= A(I + BA)^{-1} = [(I + BA)A^{-1}]^{-1} = (A^{-1} + B)^{-1} = [A^{-1}(I + AB)]^{-1}$$

$$= (I + AB)^{-1}A$$

故 $(I + AB)^{-1}A$ 为对称矩阵.

3、【参考解析】

设 t 时刻桶内的含盐量为 $y(t)$, 则此时溶液的浓度为 $\frac{y(t)}{100} = 0.01y(t)$, 那么在时间间隔 $[t, t+dt]$ 内, 进

盐量为 $0.1 \times 1 \times dt = 0.1dt$, 出盐量为 $0.01y \times 1 \times dt = 0.01ydt$, 从而含盐量的微元为

$dy = 0.1dt - 0.01ydt$ 或 $\frac{dy}{dt} + 0.01y = 0.1$, 该方程的初始条件为 $y(0) = 0$, 求解该初值问题, 得

$y = 10(1 - e^{-0.01t})$. 将 $y = 5$ 代入, 可得 $t = 100 \ln 2 \approx 69.31$ 分钟.