2023 年第六届华教杯全国大学生数学竞赛

决赛试题（专科生组）

☆ 注 意 事 项 ☆

1．参赛对象：全国在校大学生（包括本科生，研究生及专科生）均可报名参赛

2．竞赛官网：www.cecmath.com

3．竞赛组别：非数学类专业组、数学类专业组、专科生组

4．因试题整理时间有限，如在使用过程中发现编辑、题目错误等情况，请与我们联系修正。

5．联系电话：13248083435（微信同号）；联系QQ：3007715383

竞赛官网　　　　微信公众号　　　　参赛咨询微信

一、选择题（10 题、3 分/题）

1．若曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在原点相切，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{nf\left(\dfrac{2}{n}\right)}=$（　　）．

A． 1　　　B． $\sqrt{3}$　　　C． $\sqrt{5}$　　　D． $\sqrt{2}$

2．$\int_0^1 3dy\int_y^1\sqrt{1+x^2}\,dx=$（　　）．

A． $2\sqrt{2}-1$　　　B． $2\sqrt{2}$　　　C． 1　　　D． $2\sqrt{3}-1$

3．设 $\int_0^1 f(xt)dt=2f(x)$，则 $f(x)=$（　　）．

A． $C\sqrt{2x}$　　　B． $\dfrac{C}{\sqrt{2x}}$　　　C． $C+\sqrt{2x}$　　　D． $C-\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$

4．已知 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续，$f(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=5$，则在 $x=0$ 处，$f(x)$ 必定（　　）．

A．不可导　　　B．可导且 $f'(0)\neq 0$　　　C．取得极大值　　　D．取得极小值

5．设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-x^2+x-2}{x^2+1}+ax+b\right)=0$，则常数 a 与 b 分别为（　　）．

A． $a=1,b=-1$　　　B． $a=-1,b=1$　　　C． $a=-1,b=-1$　　　D． $a=1,b=1$

6．设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $e^{-2x}-\sin 3x$，则 $f'(x)=$（　　）．

A． $4e^{-2x}+9\sin 3x$　　　B． $-4e^{-2x}-9\sin 3x$　　　C． $4e^{-2x}-9\sin 3x$　　　D． $4e^{-2x}+9\cos 3x$

7．设 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的连续非零偶函数，则 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 为（　　）．

A．偶函数　　　B．奇函数　　　C．非奇非偶函数　　　D．不确定

8. 设函数 $f\left(x\right)$ 满足方程 $f(x)-x+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)dx=0$，其中 $\int_0^1 f^2(x)dx>2$，则 $f\left(x\right)=$（　　）.

A. $f(x)=x-\frac{5}{2}\sqrt{1-x^2}$　　B. $f(x)=x-\frac{9}{4}\sqrt{1-x^2}$

C. $f(x)=x-\frac{7}{3}\sqrt{1-x^2}$　　D. $f(x)=x-\frac{8}{3}\sqrt{1-x^2}$

9．设 A 是 3 阶方阵,将 A 的第 2 列与第 3 列交换得 B,再把 B 的第 1 列加到第 2 列得 C，则满足 AQ=C 的可逆矩阵 Q 为（　　）.

A. $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

10．多项式函数 $f(x)=\begin{vmatrix}2x&1&-1\\-x&x&x\\1&2&x\end{vmatrix}$ 的最高次项系数等于（　　）.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

二、填空题（7 题、4 分/题）

1．$\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin(\ln x)=$________.

2．$\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{\ln(-x)}{x^2-1}=$________.

3．若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3+f(x)}{x^2}=$________.

4．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x(\sqrt{1+x^2}-1)}=$________.

5．函数 $f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的间断点个数为________.

6．已知函数 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt$，则 $f(x)$ 的最小正周期为________．

7．已知 $\lim\limits_{x\to0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$，则 $a+b=$________．

三、解答题（3 题、14 分/题）

1．设四元线性齐次方程组为

$$\begin{cases}(a+b)x_1+(b-a)x_2+(c+d)x_3+(d-c)x_4=0\\(b+c)x_1-(a+d)x_2+(d-a)x_3+(b-c)x_4=0\\(c+d)x_1+(c-d)x_2-(a+b)x_3+(b-a)x_4=0\\dx_1+cx_2-bx_3-ax_4=0\end{cases}$$

若实数 a，b，c，d 不全为零，求四元线性齐次方程组的解．

2．证明：$x\ln(1+x)\ge 2\sin^2\frac{x}{2}+x[\frac{x}{2}+\ln(1-x)]$．

3．一个旅游者，某日早上 8 点钟离开泰山脚下的旅馆，沿着一条上山的路，在当天下午 7 点钟走到泰山顶上的旅馆。第二天早上 8 点钟，他从山顶沿原路下山，在当天下午 7 点回到黄山脚下的旅馆。试证明在这条路上存在这样一个点，旅游者在两天的同一时刻都经过此点。

参 考 答 案

一、选择题

1. 【答案】D

【参考解析】

$f(0)=1, y'|_{x=0}=1$

$$\lim_{n\to\infty} nf(\frac{2}{n}) = 2\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}} = 2f'(0)=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{nf\left(\frac{2}{n}\right)}=\sqrt{2}$$

2. 【答案】A

【参考解析】

$$\int_0^1 3dy\int_y^1\sqrt{1+x^2}dx=\int_0^1 3dx\int_0^x\sqrt{1+x^2}dy=\int_0^1 3x\sqrt{1+x^2}dx=2\sqrt{2}-1.$$

3. 【答案】B

【参考解析】

令 $xt=u$，则 $dt=\frac{1}{x}du, \int_0^1 f(xt)dt=2f(x)\Rightarrow\int_0^x f(u)du=2xf(x)$

$$f(x)=2f(x)+2xf'(x)\Rightarrow f(x)=\frac{C}{\sqrt{2x}}.$$

4. 【答案】D

【参考解析】

由 $f(0)=0$，$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=5\Rightarrow f'(0)=0$，$f''(0)=5>0$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处必定取得极小值.

5. 【答案】B

【参考解析】

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x^2+x-2}{x^2+1}+ax+b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+a)x^3+(b-1)x^2+(1+a)x+b-2}{x^2+1}=0,$$

所以分子的次数一定比分母的次数底，因此 $a=-1,b=1$，故选 B.

6. 【答案】A

【参考解析】

由已知得 $\int f(x)dx=e^{-2x}-\sin 3x+C$，两边求导得 $f(x)=-2e^{-2x}-3\cos 3x$，

两边再求导得 $f'(x)=4e^{-2x}+9\sin 3x$，故选 A.

7. 【答案】B

【参考解析】

对于 $\Phi(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt$，设 $u=-t$, 则

$$\Phi(-x)=-\int_0^x f(-u)du=-\int_0^x f(u)du=-\int_0^x f(t)dt=-\Phi(x),$$

所以该函数为奇函数，故选 B.

8. 【答案】B

【参考解析】

设 $\int_0^1 f^2\left(x\right)dx=a\geq 0$，则

$$f(x)=x-a\sqrt{1-x^2},f^2(x)=(1-a)x^2-2ax\sqrt{1-x^2}+a^2,$$

所以 $\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{1-a^2}{3}+a^2-\frac{2}{3}a=a$，解得 $a=\frac{9}{4}$（舍去 $a=\frac{1}{4}$），

所以 $f(x)=x-\frac{9}{4}\sqrt{1-x^2}$.

9. 【答案】A

【参考解析】

根据题意，$Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

10. 【答案】C

【参考解析】

x^3 的系数只要考察 $2x\begin{vmatrix}x&-x\\2&x\end{vmatrix}=2x^3+4x^2$.

所以 x^3 前的系数为 2.

二、填空题

1. 【答案】0

【参考解析】

有界函数与无穷小的乘积还是无穷小.

2. 【答案】$\frac{1}{2}$

【参考解析】

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{\ln(-x)}{x^2-1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{x-1}\cdot\frac{\ln[1-(x+1)]}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

3. 【答案】$\frac{9}{2}$

【参考解析】

用泰勒公式把 $\sin 3x$ 展开，$\sin 3x=3x-\frac{1}{3!}(3x)^3+o(x^3)$，则

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{3x-\frac{1}{3!}(3x)^3+o(x^3)+xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3x+o(x^3)+xf(x)}{x^3}-\frac{9}{2}=\lim_{x\to0}\frac{3+f(x)}{x^2}-\frac{9}{2}=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{3+f(x)}{x^2}=\frac{9}{2}$.

4. 【答案】1

【参考解析】

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x(\sqrt{1+x^2}-1)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{2}}{\frac{x^3}{2}}=1.$$

5. 【答案】4

【参考解析】

$x=0$，$x=2$，$x=1$，$x=-1$ 为间断点.

6. 【答案】π

【参考解析】

$$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt\overset{t=u+\pi}{=}\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(u+\pi)|du=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(u)|du=f(x),$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π .

7. 【答案】$-\frac{3}{2}$

【参考解析】

由题意知 $\lim\limits_{x\to0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(e^x+ax^2+bx)}=1$，从而有

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln(e^x+ax^2+bx)=\lim_{x\to0}\frac{e^x+2ax+b}{2x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{e^x+ax^2+bx}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+2ax+b}{2x}=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}(e^x+2ax+b)=1+b=0$，得 $b=-1$．再由洛必达法则得

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x+2ax-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+2a}{2}=\frac{1+2a}{2}=0$$，从而 $a=-\frac{1}{2}$，所以 $a+b=-\frac{3}{2}$.

三、解答题

1. 【参考解析】

该方程组等价于 $\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0 \\ bx_1-ax_2+dx_3-cx_4=0 \\ cx_1-dx_2-ax_3+bx_4=0 \\ dx_1+cx_2-bx_3-ax_4=0 \end{cases}$，对应的系数矩阵为 $A=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{bmatrix}$，

$A^TA=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$，其中 $\lambda=a^2+b^2+c^2+d^2\neq 0$，所以 $|A|^2=|A^TA|=\lambda^4\neq 0$，故 $|A|\neq 0$，

从而该方程组仅有零解.

2. 【参考解析】

$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}(-1<x<1)$，又 $\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=(-1<x<1)$，

故 $x\ln\frac{1+x}{1-x}=x[\ln(1+x)-\ln(1-x)]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}$

$=[x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^5}{4}\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n}+\cdots]+(x^2+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}+\frac{x^5}{4}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n}+\cdots)$

$=2(x^2+\frac{x^4}{3}+\cdots+\frac{x^{2n}}{2n-1}+\cdots)\ (-1<x<1)$.

又因为 $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots(-1<x<1)$.

所以 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x=1+(2x^2-\frac{x^2}{2!})+(\frac{2}{3}x^4+\frac{x^4}{4!})+(\frac{2}{5}x^6-\frac{x^6}{6!})+(\frac{2}{7}x^6+\frac{x^8}{8!})+\cdots$

$+[\frac{2}{4n-3}x^{4n-2}-\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}]+[\frac{2}{4n-1}x^{4n}+\frac{x^{4n}}{(4n)!}]+\cdots$

$=1+\frac{3}{2}x^2+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{2}{4n-3}-\frac{1}{(4n-2)!}]x^{4n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{2}{4n-1}+\frac{1}{(4n)!}]x^{4n}$

$\geq 1+\frac{3}{2}x^2\geq 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$，所以 $x\ln(1+x)\geq 2\sin^2\frac{x}{2}+x[\frac{x}{2}+\ln(1-x)]$.

3. 【参考解析】

设两个旅馆之间的路程为L，以$f(t)$表示在时刻t（$t\in[8,19]$）该旅游者离开山脚下的旅馆的路程，

则可知$f(t)$是区间$[8,19]$上的连续函数，且有

$$f(8)=0\,,f(19)=L$$

以$g(t)$表示在时刻t（$t\in[8,19]$）该旅游者离开山顶的旅馆的路程，则可知$g(t)$是区间$[8,19]$上的连续函数，且有

$$g(8)=L\,,g(19)=0$$

设$\varphi(t)=f(t)-g(t)$，则$\varphi(t)$是区间$[8,19]$上的连续函数，且

$$\varphi(8)=f(8)-g(8)=0-L=-L$$

$$\varphi(19)=f(19)-g(19)=L-0=L$$

由闭区间上连续函数的零点存在定理，存在$\xi\in(8,19)$，使得$\varphi(\xi)=0$，即$f(\xi)=g(\xi)$.