华教杯大学生数学竞赛
HUA JIAO BEI DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI

2025 年第八届华教杯大学生数学竞赛

初赛试题（数学类专业组）

☆注 意 事 项☆

1．参赛对象：全国在校大学生（包括本科生，研究生及专科生）均可报名参赛

2．竞赛官网：www.cecmath.com

3．因试题整理时间有限，如在使用过程中发现编辑、题目错误等情况，请与我们联系修正

4．联系电话：13248083435（微信同号）

竞赛官网　　微信公众号　　参赛咨询微信

一、选择题（共 10 题，3 分/题）

1．设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=4x+3\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=$（　　）.

A．-2　　B．1　　C．2　　D．-1

2．已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x & x\le 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{n}} & \dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n}(n=1,2\cdots)\end{cases}$ 则（　　）.

A．$f(x)$ 在 $x=0$ 处间断　　B．$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导

C．$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=1$　　D．$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且二阶导数存在

3．$\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=0}^{n-1}(2+\cos i\dfrac{\pi}{n})^{\frac{\pi}{n}}=$（　　）.

A．$e^{\int_0^{\pi}\ln(2+\cos x)dx}$　　B．$e^{\int_0^{1}\ln(2+\cos x)dx}$　　C．$e^{\pi\int_0^{1}\ln(2+\cos \pi x)dx}$　　D．$e^{\pi\int_0^{\pi}\ln(2+\cos \pi x)dx}$

4．已知曲线 $f(x)=\dfrac{x^{a+x}}{(b+x)^x}(x>0,b>0)$ 有一条斜渐近线 $y=\dfrac{x}{e^2}+c$，则 $a\cdot b\cdot c$ 的值为（　　）.

A．$\dfrac{2}{e^2}$　　B．$\dfrac{4}{e^2}$　　C．$\dfrac{6}{e^2}$　　D．$\dfrac{8}{e^2}$

5．两平面 $x+y+z+7=0$ 和 $2x+y+z+1=0$ 的夹角等于（　　）.

A．$\dfrac{\pi}{3}$　　B．$\dfrac{\pi}{2}$　　C．$\arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　D．$\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

6．设 $|\beta|<\dfrac{2}{3}$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n!\sin\beta\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\beta}{3}\cdots\sin\dfrac{\beta}{n}$（　　）.

A．绝对收敛　　B．条件收敛　　C．发散　　D．收敛性与 β 的取值有关

7．设 $f(x)$ 连续可导，$f(1)=\dfrac{1}{2}$，G 为不包含原点的单连通区域，对任意曲线 $L\in G$，曲线积分

$\oint_L \frac{ydx-xdy}{2x^2+f(y)}=0$，则 $f(x)=$（　　）.

A．$\frac{1}{2}x$　　B．$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{2}x^2$　　D．$2x-1$

8．$\iint_D \frac{x}{2}dxdy=$（　　），其中 $D=\left\{(r,\theta)\middle|2\le r\le 2(1+\cos\theta),-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$.

A．0　　B．$\frac{1}{2}\pi+1$　　C．$\frac{3}{2}\pi+\frac{10}{3}$　　D．$\frac{5}{2}\pi+\frac{16}{3}$

9．已知 A 是三阶矩阵，α_1、α_2、α_3 是三维列向量，且 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\neq 0$．$A\alpha_1=\alpha_2-2\alpha_3$，$A\alpha_2=3\alpha_1+\alpha_2$，$A\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$，则 $|A|=$（　　）.

A．8　　B．9　　C．10　　D．11

10．2025 阶方阵 A 的极小多项式为 $(\lambda-1)(\lambda-2)^{2021}$，则 A 互不相似的 Jordan 标准形共有（　　）种.

A．2021　　B．2023　　C．2025　　D．2027

二、填空题（共 7 题，4 分/题）

1．广义积分 $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-7x}\,\mathrm{d}x=$_____.

2．设 $f(x)$ 可微，且 $x=\int_0^x f(t)dt+\int_0^x t\cdot f(t-x)dt$，则 $f(x)=$_____.

3．设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^3+y^3-3axy=0(a>0)$ 所确定的隐函数，则 $y=y(x)$ 的斜渐近线为_____.

4．点 $(1,2,3)$ 在直线 $\frac{x+4}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{-1}$ 上的投影为_____.

5．设 $z=u(x,ay)e^{(x+by)}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，若有 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}-z=0$，则 $a+b=$_____.

6．设函数 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，在点 $M(2,-1)$ 的两个偏导数分别为 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_M=-2$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_M=4$，则 $f(x,y)$ 在点 $M(2,-1)$ 处方向导数的最小值为_____.

7．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2+5}}{n^{\beta}}$ 收敛的充要条件是 β 满足不等式_____.

三、解答题（共 3 题，14 分/题）

1．设线性方程组为 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=1,\\ x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=1,\\ x_1+x_2+x_3+(\lambda-1)x_4=2,\end{cases}$ 试讨论下列问题：

（1）当 λ 取什么值时，线性方程组有唯一解？（7 分）

（2）当 λ 取什么值时，线性方程组无穷多解？并在有无穷多解时求其解.（7 分）

2．设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，证明：$f(0)=0$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=2$.

3．设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=(2y^2-1)e^{x-y^2}$，且 $f(x,0)=x+2$，设 L_t 为从点 $(0,0)$ 到 $(t,1)$ 的任意一条光滑曲线，定义 $I(t)=\int_{L_t}\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$.

（1）证明：对于任意 t，积分 $I(t)$ 与路径无关，并写出其表达式；（8 分）

（2）计算 $I(t)$ 的最值.（6 分）

参 考 答 案

一、选择题

1、D

【参考解析】

令 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$ ， $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ ， $f(x) = 4x + 3A$ 等式两边同时在区间 $[0,1]$ 积分，

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4\int_0^1 x\mathrm{d}t + 3A$，即 $A = 4\int_0^1 x\mathrm{d}t + 3A$ ， $A = -1$，答案为选项 D.

2、B

【参考解析】

连续性：由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ ， $x \to 0^+$ 时 $n \to +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ 故连续.

函数的可导性： 由于 $\dfrac{1}{n+1} < x \le \dfrac{1}{n}$ 时，$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} \le \dfrac{f(x)}{x} < \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow f'_+(0) = +\infty$

$f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$，由于 $f'_-(0) \ne f'_+(0)$ 故在 $x = 0$ 处不可导.

3、A

【参考解析】

变元为 $\dfrac{i\pi}{n}$，变元范围为 $(0,\pi)$ 步长为 $\dfrac{\pi}{n}$，故此极限改写为 $e^{\int_0^{\pi}\ln(2+\cos x)dx}$.

4、B

【参考解析】

由题意得， $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{a-1}}{\left(1+\frac{b}{x}\right)^x} = \dfrac{1}{e^2} \Rightarrow a = 1, b = 2,$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{x+1}}{(2+x)^x} - \frac{x}{e^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{(1+\frac{2}{x})^x} - \frac{1}{e^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^2 - (1+\frac{2}{x})^x}{e^4}\right)$$

$$=\frac{1}{e^4}\lim_{x\to+\infty}x(e^2-e^{x\ln(1+\frac{2}{x})})=\frac{1}{e^2}\lim_{x\to+\infty}x\left[2-x\ln(1+\frac{2}{x})\right],$$

令 $x=\frac{1}{t}\Rightarrow\frac{1}{e^2}\lim_{t\to0^+}\frac{2t-\ln(1+2t)}{t^2}=\frac{2}{e^2}\Rightarrow c=\frac{2}{e^2}\therefore a\cdot b\cdot c=\frac{4}{e^2}$.

5、C

【参考解析】

两平面 $x+y+z+7=0$ 和 $2x+y+z+1=0$ 的法向量分别为 $\vec{n}_1=(1,1,1)$

$\vec{n}_2=(2,1,1)$，由向量的夹角概念得 $\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{|1\cdot2+1\cdot1+1\cdot1|}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{2^2+1+1}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

所以夹角等于 $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$，故选 C 项.

6、A

【参考解析】

$$\left|n!\sin\beta\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{3}\cdots\sin\frac{\beta}{n}\right|\le\left|n!\frac{\beta^n}{1\cdot2\cdot3\ldots n}\right|=\left|\beta^n\right|$$

由于 $|\beta|<\frac{2}{3}$，故绝对收敛，故选 A 项.

7、C

【参考解析】

$$P(x,y)=\frac{y}{2x^2+f(y)},Q(x,y)=\frac{-x}{2x^2+f(y)}$$

$\oint_L\frac{ydx-xdy}{2x^2+f(y)}=0$，故 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow yf'(y)=2f(y)$，即 $f(y)=Cy^2$

$f(1)=\frac{1}{2},$所以$C=\frac{1}{2}$，即 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$，故选 C 项.

8、D

【参考解析】

将二重积分转化成极坐标形式计算，再由$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta$积分性质得

$$\iint_D \frac{x}{2}dxdy=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_2^{2(1+\cos\theta)} r^2\cos\theta dr d\theta=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta[(1+\cos\theta)^3-1]d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta]d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta]d\theta$$

$$=\frac{8}{3}(3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+3\cdot\frac{2}{3}+\frac{3\pi}{16})=\frac{5}{2}\pi+\frac{16}{3}$$

，故选 D 项.

9、D

【参考解析】

把已知条件$A\alpha_1=\alpha_2-2\alpha_3$，$A\alpha_2=3\alpha_1+\alpha_2$，$A\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$合并为一个矩阵等式：

$(A\alpha_1,\ A\alpha_2,\ A\alpha_3)=(\alpha_2-2\alpha_3,3\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)$，进一步写成分块矩阵乘积形式：

$A(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\begin{bmatrix}0&3&1\\1&1&-1\\-2&0&-1\end{bmatrix}$，对等式两边取行列式，

有$|A||\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3|=\begin{vmatrix}0&3&1\\1&1&-1\\-2&0&-1\end{vmatrix}|\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3|$，因为$|\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3|\neq 0$，

所以$|A|=\begin{vmatrix}0&3&1\\1&1&-1\\-2&0&-1\end{vmatrix}=11$.

10、A

【参考解析】

因为A的极小多项式为$(\lambda-1)(\lambda-2)^{2021}$，特征值 2 的 Jordan 标准形的最大阶数为 2021，所以A互不相似的 Jordan 标准形共有 2021 种.

二、填空题

1、 $\dfrac{1}{7\mathrm{e}^{7}}$

【参考解析】

$\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-7x}\,\mathrm{d}\,x=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_1^{t}\mathrm{e}^{-7x}\,\mathrm{d}\,x=\lim\limits_{t\to+\infty}-\dfrac{1}{7}\mathrm{e}^{-7x}\Big|_1^{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}(\dfrac{1}{7\mathrm{e}^{7}}-\dfrac{1}{7\mathrm{e}^{7t}})=\dfrac{1}{7\mathrm{e}^{7}}$.

2、 $\cos x-\sin x$

【参考解析】

由题意得 $x=\int_0^x f(t)dt+\int_0^x(x-t)\cdot f(-t)dt$ 两边同时求导得 $1=f(x)+\int_0^x f(-t)dt$，

令 $x=0\Rightarrow f(0)=1$。两边再次求导 $0=f'(x)+f(-x)$，$f'(0)=-1$

$0=f'(-x)+f(x)\cdots\cdots[1]$，对 $0=f'(x)+f(-x)$ 两边再次求导得 $0=f''(x)-f'(-x)\cdots\cdots[2]$，

$[1]+[2]\Rightarrow f''(x)+f(x)=0$，解得 $f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$，带入特解条件得 $f(x)=\cos x-\sin x$.

3、 $y=-x-a$

【参考解析】

令 $\dfrac{y}{x}=t\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^3}\\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}\end{cases}$，易得 $x\to\infty$ 时等价于 $t\to-1\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{t\to(-1)^-}t=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(y+x)=\lim\limits_{t\to(-1)^-}\dfrac{3at(1+t)}{1+t^3}=-a\Rightarrow x\to+\infty$ 斜渐近线为 $y=-x-a$，

同理 $x\to-\infty$ 斜渐近线也为 $y=-x-a$.

4、 $(-\dfrac{17}{6},\dfrac{1}{3},-\dfrac{25}{6})$

【参考解析】

设点的投影坐标为 $(t-4,2t-2,-t-3)$，则

$(t-5,2t-4,-t-6)\cdot(1,2,-1)=0\Rightarrow t=\dfrac{7}{6}$，故投影为 $(-\dfrac{17}{6},\dfrac{1}{3},-\dfrac{25}{6})$.

5、 1

【参考解析】

设 $z=u(x,ay)e^{(x+by)}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(\dfrac{\partial u}{\partial x}+u)e^{x+by}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=(a\dfrac{\partial u}{\partial y}+bu)e^{x+by}$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(a\dfrac{\partial u}{\partial y}+b(\dfrac{\partial u}{\partial x}+u))e^{x+by}$，又有 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}-z=0$

所以 $e^{x+by}(2a\dfrac{\partial u}{\partial y}+(b-1)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(2b-2)u)=0$，即有 $a=0,b=1\Rightarrow a+b=1$.

6、 $-2\sqrt{5}$

【参考解析】

$f(x,y)$ 在点 $M(2,-1)$ 的两个偏导数分别为 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_M=-2,\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_M=4$，则 $\nabla f(M)=(-2,4)$

而方向导数的最小值 $=-\|\nabla f\|$，$\|\nabla f\|=\sqrt{(-2)^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

所以方向导数的最小值 $=-2\sqrt{5}$.

7、 $\beta>2$

【参考解析】

当 $n\to\infty$ 时，$\sqrt{3n^2+5}\sim\sqrt{3n^2}=\sqrt{3}n$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{\sqrt{3n^2+5}}{n^\beta}}{\dfrac{\sqrt{3}n}{n^\beta}}=1$

根据比较审敛法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2+5}}{n^\beta}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{3}n}{n^\beta}$ 敛散性相同

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{3}n}{n^\beta}=\sqrt{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\beta-1}}$ 是 p-级数，当 $\beta-1>1$，即 $\beta>2$ 时收敛，

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2+5}}{n^\beta}$ 也当 $\beta>2$ 时收敛.

三、解答题

1、【参考解析】

系数行列式$|A|=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$.

（1）由克拉默法则知，当$\lambda\neq1$且$\lambda\neq2$时，方程组有唯一解.

（2）当$\lambda=1$时，$\begin{bmatrix}1&1&1&1&\vdots&1\\1&1&1&1&\vdots&1\\1&1&1&1&\vdots&1\\1&1&1&0&\vdots&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&\vdots&1\\0&0&0&-1&\vdots&1\\0&0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}$，方程组有无穷多解：

$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\0\\-1\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$，其中$k_1,k_2$为任意数.

2、【参考解析】

证明：函数$f(x)$在$x=0$上连续，则有$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$，又$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，

所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0=f(0)$，$f(0)=0$得证；

由导数的定义和已知得$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=2$.

即$f(0)=0$，$f(x)$在$x=0$处可导，且$f'(0)=2$.

3、【参考解析】

（1）函数$f(x,y)$满足$\dfrac{\partial f}{\partial y}=(2y^2-1)e^{x-y^2}$

所以$f(x,y)=\int\dfrac{\partial f}{\partial y}dy=\int(2y^2-1)e^{x-y^2}dy=-ye^{x-y^2}+C(x)$

又$f(x,0)=x+2$，故$C(x)=x+2$，即$f(x,y)=-ye^{x-y^2}+x+2$，因此$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-ye^{x-y^2}+1$

所以$I(t)=\int_{L_t}\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy=\int_{L_t}(-ye^{x-y^2}+1)dx+(2y^2-1)e^{x-y^2}dy$

其中$P(x,y)=-ye^{x-y^2}+1,Q(x,y)=(2y^2-1)e^{x-y^2}$

$\frac{\partial P}{\partial y}=-e^{x-y^2}-ye^{x-y^2}\cdot(-2y)=(2y^2-1)e^{x-y^2}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=(2y^2-1)e^{x-y^2}$

即 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=(2y^2-1)e^{x-y^2}$，故对于任意 t，积分 $I(t)$ 与路径无关

而 $I(t)=\int_L\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=f(t,1)-f(0,0)=-e^{t-1}+t$.

（2）由（1）知，$I(t)=-e^{t-1}+t$，所以 $I'(t)=-e^{t-1}+1$

令 $I'(t)=-e^{t-1}+1=0$ 得驻点为 $t=1$

当 $t>1$ 时，$I'(t)<0$，即 $I(t)$ 单调递减

当 $t<1$ 时，$I'(t)>0$，即 $I(t)$ 单调递增

由单调性可知，$I(t)$ 在 $t=1$ 处取得极大值，最大值，且最大值为 $I(1)=0$.