2024 年第七届华教杯全国大学生数学竞赛

初赛试题（数学类专业组）

☆注 意 事 项☆

1．参赛对象：全国在校大学生（包括本科生，研究生及专科生）均可报名参赛

2．竞赛官网：www.cecmath.com

3．竞赛组别：非数学类专业组、数学类专业组、专科生组

4．因试题整理时间有限，如在使用过程中发现编辑、题目错误等情况，请与我们联系修正。

5．联系电话：13248083435（微信同号）；联系QQ：3007715383

竞赛官网　　　　微信公众号　　　　参赛咨询微信

一、选择题（共 10 题，3 分/题）

1. 已知函数 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0-3\Delta x)}{\Delta x}=$（　　）.

A. $f'(x_0)$　　B. $2f'(x_0)$　　C. $5f'(x_0)$　　D. $-f'(x_0)$

2. 设 $f'(x^4)=4\ln x$，且 $f(1)=0$，则函数 $f(x)=$（　　）.

A. $f(x)=\ln x-x$　　B. $f(x)=\ln x-x+1$

C. $f(x)=x\ln x-x$　　D. $f(x)=x\ln x-x+1$

3. 函数 $f(x)=2(x+1)|x^2-2x-3|$ 的不可导点个数等于（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 0

4. 与原点距离为 6，且在坐标轴上的截距之比为 $a:b:c=1:3:2$ 的平面方程是（　　）.

A. $x+3y+2z\pm 21=0$　　B. $6x+2y+3z\pm 42=0$

C. $6x+2y+3z\pm 7=0$　　D. $x+2y+2\sqrt{5}z\pm 30=0$

5. 设 $f(x)$ 可微且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-x)-f(0)}{2x}=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的法线斜率为（　　）.

A. -2　　B. 2　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

6. 二元函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}+2\sin xy$ 在点 $(0,0)$ 处有（　　）.

A. 不连续　　B. 在该点全微分存在

C. 偏导数不存在　　D. 在该点全微分不存在

7. 设 $L:x^{2n+1}+y^{2n+1}=x^n y^n(x\ge 0,y\ge 0)$ 为逆时针方向，则 $\oint_L xdy-ydx=$（　　）.

A. $\dfrac{1}{2n-1}$　　B. $\dfrac{1}{2n}$　　C. $\dfrac{1}{2n+1}$　　D. $\dfrac{1}{2n+2}$

8．级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数 $s(x)$ 为（　　）.

A．e^{2x}　　B．$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$　　C．$\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$　　D．$e^{-2x}+1$

9．已知 $A^3=2E$，$B=A^2-2A+2E$，则 $B^{-1}=$（　　）.

A．$\frac{1}{5}(A^2+3A+4E)$　　B．$\frac{1}{10}(A^2+3A+4E)$

C．$\frac{1}{5}(A^2+3A-4E)$　　D．$\frac{1}{10}(A^2-3A+4E)$

10．设 $f=x^{2m}+2x^{m+1}-23x^m+x^2-22x+90$，$g=x^m+x-6$，其中 m 是大于 2 的自然数，

则 $(f,g)=$（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

二、填空题（共 7 题，4 分/题）

1．极限 $\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}]^{2n-1}=$__________.

2．$\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^3 x\arctan e^x dx=$__________.

3．求二阶线性微分方程 $x^2y''-2xy'+2y=0\quad x\neq0$ 的通解__________.

4．过点 $(1,1,1)$ 且与直线 $L_1: x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 和 $L_2:\frac{x-1}{2}=y+2=\frac{z-3}{4}$ 都相交的直线__________.

5． 设 $y=y(x)$ 是由方程 $e^y-xy-x=1$ 所确定的函数，若 $\lim_{x\to0}\frac{y(x)-x}{x^{\alpha}}=\frac{1}{2}$，则 $\alpha=$__________.

6．设 D 由曲线 $y=x^2,y^2=4x,x=y^2,x^2=4y$ 围成，则 $\iint_D xydxdy=$__________.

7．设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的系数满足$a_0=2, na_n=a_{n-1}+n-1, n=1,2,\cdots$，则此幂级数的和函数

$S(x)=$__________.

三、解答题（共 3 题，14 分/题）

1．设A为 3 阶矩阵，且$|A|=3$，求$\left|2A^*+(\frac{1}{3}A)^{-1}\right|$的值.

2．现给定数列$\{x_n\}$满足$x_n=\sin 1+\frac{\sin 2}{2!}+\cdots+\frac{\sin n}{n!}$.

（1）若存在某常数M（或m），对于一切$n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_n\le M$（或$a_n\ge m$），则称数列$\{a_n\}$的上（或下）界，若数列$\{a_n\}$既有上界也有下界，则称数列$\{a_n\}$为“有界”.

证明：数列$\{x_n\}$有界，但不单调（参考公式：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$）；

（2）根据数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件：对于任意给定的正数ε，存在正整数N，使得当$m>N,n>$N 时就有$|x_n-x_m|<\varepsilon$．证明：数列$\{x_n\}$收敛.

3．设 $p>0$，$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^p\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$.

（1）当 $p>0$ 时，判断 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否连续.

（2）当 $0<p\le\dfrac{1}{2}$ 时，判断 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点两个偏导数是否存在，$p>\dfrac{1}{2}$ 时，判断 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点两个偏导数是否存在.

（3）当 $p>\dfrac{1}{2}$ 时，判断 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否可微.

参　考　答　案

一、选择题

1、C

【参考解析】

已知函数 $f(x)$ 在 x_0 可导，$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0-3\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)-[f(x_0-3\Delta x)-f(x_0)]}{\Delta x}$$

$=2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}+3\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[f(x_0-3\Delta x)-f(x_0)]}{-3\Delta x}=5f'(x_0)$，即选项 C 正确.

2、D

【参考解析】

先换元，再积分，令 $x^4=t$，则有 $f'(t)=\ln t$ 两边积分得 $f(x)=x\ln x-x+c$， $f(1)=0$ 代入得

$c=1$ 故 $f(x)=x\ln x-x+1$.

3、A

【参考解析】

由函数图像可知点 $x=3$ 是不可导点，只有一个不可导点.

4、B

【参考解析】

由在坐标轴上的截距之比为 $a:b:c=1:3:2$ 可排除 A、D. 再由 $d=\dfrac{|6\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 0\pm 42|}{\sqrt{6^2+2^2+3^2}}=6$，

故选择 B.

5、D

【参考解析】

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-x)-f(0)}{2x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-x)-f(0)}{-x-0}=-\dfrac{1}{2}f'(0)=1$，故 $f'(0)=-2$，即曲线 $y=f(x)$ 在

$(0,f(0))$ 处的切线斜率为-2，因此法线的斜率等于 $\frac{1}{2}$.

6、D

【参考解析】

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{|xy|}+2\sin xy)=f(0,0)$$

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0 \text{ 同理 } f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$$

令 $y=kx$， $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,0)}\sqrt{\frac{|xy|}{x^2+y^2}}=\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,0)}\sqrt{\frac{k}{k^2+1}}$ 不存在

所以在 $(0,0)$ 点全微分不存在.

7、C

【参考解析】

令 $y=tx$，则 $x=\frac{t^n}{1+t^{2n+1}}, y=\frac{t^{n+1}}{1+t^{2n+1}}>0, t>0$，

则 $xdy-ydx=xdtx-txdx=x^2dt=(\frac{t^n}{1+t^{2n+1}})^2dt$

所以 $\oint_L xdy-ydx=\int_0^{+\infty}(\frac{t^n}{1+t^{2n+1}})^2dt=\frac{1}{2n+1}$.

8、B

【参考解析】

设 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，则 $s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$， $s''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=s(x)$

$s(0)=1, s'(0)=0$，综上得 $s(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

9、B

【参考解析】

令 $f(x)=x^3-2, g(x)=x^2-2x+2$， $u(x)=-\frac{1}{10}(x+1), v(x)=\frac{1}{10}(x^2+3x+4)$

由辗转相除法知 $(f(x),g(x))=1$，则存在 $u(x),v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$，

则 $u(x)f(A)+v(x)g(A)=E$．因为 $A^3=2E$，$f(A)=A^3-2E=O$，

所以 $\frac{1}{10}(A^2+3A+4E)(A^2-2A+2E)=E$，则 $B^{-1}=(A^2-2A+2E)^{-1}=\frac{1}{10}(A^2+3A+4E)$．

10、A

【参考解析】

设 ω 是 g 的任一根，于是 $\omega^m+\omega-6=0$，则

$f(\omega)=(\omega^m+\omega)^2-23(\omega^m+\omega)+\omega+90=36-23\cdot 6+\omega+90=\omega-12$，若 ω 是虚根，则显然 $f(\omega)\neq 0$；若 ω 是实根，则显然 $\omega<12, f(\omega)\neq 0$，故 $(f,g)=1$.

二、填空题

1、 $\underline{\quad e^{-2} \quad}$

【参考解析】

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]^{2n-1}$$

$$=\lim_{n}\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{\frac{2n-1}{-(n+1)}}=e^{-2}.$$

2、 $\underline{\quad \frac{\pi^2}{3} \quad}$

【参考解析】

令 $x=-t$，则 $\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^3 x\arctan e^x dx=\int_{-\pi}^{\pi}t\sin^3 t\arctan e^{-t}dt$

$$\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^3 x\arctan e^x dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^3 x(\arctan e^x+\arctan e^{-x})dt=\frac{\pi}{4}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^3 xdx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}x\sin^3 xdx=\frac{\pi^2}{4}\int_{0}^{\pi}\sin^3 xdx=\frac{\pi^2}{3}.$$

3、 $y=C_1x+C_2x^2$

【参考解析】

显然 $y=x$ 是方程的一个解，令 $y=ux$，则

$$y^{'}=u+x\frac{du}{dx},\ y^{''}-x\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{du}{dx}$$，带入原方程得 $$\frac{d^2u}{dx^2}=0\Rightarrow u=C_1+C_2x$$

故通解为：$y=C_1x+C_2x^2$.

4、 $\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-1}{6}$

【参考解析】

设 $v=(l,m,n)$，则

$$P=(1,1,1);v_1=(1,2,3);M_1=(0,0,0);v_2=(2,1,4);M_2=(1,-2,3)$$

$$\begin{array}{l}\overrightarrow{\overrightarrow{M_1M}}\cdot(v_1\times v)=0\Rightarrow l-2m+n=0\\ \overrightarrow{M_2M}\cdot(v_2\times v)=0\Rightarrow 7l-2m-3n=0\end{array}\quad 解得\begin{cases}l=4\\ m=5\\ n=6\end{cases},$$

所求直线方程为：$\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-1}{6}$.

5、 $\alpha=2$

【参考解析】

令 $x=0$ 可得 $y(0)=0$，等式两边对 x 求一阶和二阶导，

得 $e^y y^{'}-y-xy^{'}-1=0$，令 $x=0$ 得 $y^{'}(0)=1$，

再求导 $e^y(y^{'})^2+e^y y^{''}-2y^{'}-xy^{''}=0$，令 $x=0$ 得 $y^{''}(0)=1$.

由泰勒公式 $$y(x)=y(0)+y^{'}(0)x+\frac{y^{''}(0)}{2}x^2+o(x^2)\Rightarrow y(x)-x=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

$\therefore\alpha=2$.

6、 $\underline{\dfrac{75}{4}}$

【参考解析】

做变换 $u=\dfrac{x^2}{y},v=\dfrac{y^2}{x}\Rightarrow\begin{cases}x=u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}}\\ y=u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}\end{cases}$， $J=\begin{vmatrix}x_u & y_u\\ x_v & t_v\end{vmatrix}=\dfrac{1}{3}$，且

$$D_{uv}=\{(u,v)|1\le u\le 4,1\le v\le 4\}\ 则$$

$$\iint_D xydxdy=\frac{1}{3}\iint_{D_{uv}}uvdudv=\frac{1}{3}\int_1^4 udu\int_1^4 vdv=\frac{1}{3}\cdot\frac{15}{2}\cdot\frac{15}{2}=\frac{75}{4}.$$

7、 $\underline{e^x+\dfrac{1}{1-x}}$

【参考解析】

$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，则 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n-1}+n-1)x^{n-1}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^{n-1}=S(x)+\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$S'(x)=S(x)+\frac{x}{(1-x)^2},\ 且S(0)=a_0=2\ 得$$

$$S(x)=e^x+\frac{1}{1-x}.$$

三、解答题

1、【参考解析】

因为 $2A^*=2|A|A^{-1},|A|=3,$ 所以 $2A^*=2|A|A^{-1}=6A^{-1}$， $(\dfrac{1}{3}A)^{-1}=3A^{-1}$，

所以 $2A^*+(\dfrac{1}{3}A)^{-1}=6A^{-1}+3A^{-1}=9A^{-1}$，

所以 $\left|2A^*+(\dfrac{1}{3}A)^{-1}\right|=|9A^{-1}|=(9)^3|A^{-1}|=729|A^{-1}|=729\dfrac{1}{|A|}=729\times\dfrac{1}{3}=243$.

2、【参考解析】

证明：（1）由 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$，可得

$|x_n|=\left|\sin 1+\frac{\sin 2}{2!}+\cdots+\frac{\sin n}{n!}\right|\le|\sin 1|+\left|\frac{\sin 2}{2!}\right|+\cdots+\left|\frac{\sin n}{n!}\right|\le 1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<e$，所以数列 $\{x_n\}$ 有界，因为 $\sin 4<0$，则 $x_3=1+\frac{\sin 2}{2!}+\frac{\sin 3}{3!}>x_2=1+\frac{\sin 2}{2!}$，

$x_3=1+\frac{\sin 2}{2!}+\frac{\sin 3}{3!}>x_4=1+\frac{\sin 2}{2!}+\frac{\sin 3}{3!}+\frac{\sin 4}{4!}$，所以数列 $\{x_n\}$ 不单调.

（2）

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)!}+\frac{\sin(n+2)}{(n+2)!}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{(n+p)!}\right|\le\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+p)!}$$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$=[(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})+(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})+\cdots+(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p})]=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}$，对 $\forall\varepsilon>0$，取 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>n_0$ 时，对 $\forall p\in N_+$，都有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$，所以数列 $\{x_n\}$ 收敛.

3、【参考解析】

（1）令 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，当 $p>0$ 时可以得到

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{\rho\to 0}\rho^{2p}\sin\frac{1}{\rho}=0=f(0,0)$，因此 $f(x,y)$ 当 $p>0$ 时在 $(0,0)$ 点连续.

（2）由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{2p-1}\sin\frac{1}{|x|}$，$\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}y^{2p-1}\sin\frac{1}{|y|}$，

故 $0<p\le\frac{1}{2}$ 时，$f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$ 不存在；$p>\frac{1}{2}$ 时，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的两个偏导数均存在，且 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

（3）假设 $p>\frac{1}{2}$，结合（2），得到 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可偏导且 $f_x(0,0)=0$，$f_y(0,0)=0$.

记 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，我们得到

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho}=(x^2+y^2)^{p-\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\to 0(\rho\to 0)$$，至此得到

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微且 $df(0,0)=0$.