华教杯大学生数学竞赛
HUA JIAO BEI DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI

2025 年第八届华教杯大学生数学竞赛

初赛试题（专科生组）

☆注 意 事 项☆

1．参赛对象：全国在校大学生（包括本科生，研究生及专科生）均可报名参赛

2．竞赛官网：www.cecmath.com

3．因试题整理时间有限，如在使用过程中发现编辑、题目错误等情况，请与我们联系修正

4．联系电话：13248083435（微信同号）

竞赛官网　　微信公众号　　参赛咨询微信

一、选择题（共 10 题，3 分/题）

1．函数 $y=\sqrt{\ln(4-x^2)}+\arcsin(x-1)$ 的定义域（　　）.

A．$\{x\,|\,0\le x\le 1\}$　　B．$\{x\,|\,-1\le x\le\sqrt{3}\}$

C．$\{x\,|\,-1\le x\le 1\}$　　D．$\{x\,|\,0\le x\le\sqrt{3}\}$

2．下列给出的函数中，属于偶函数的是（　　）.

A．$f(x)=x^2\sin x^3$　　B．$f(x)=x\cos x^3$

C．$f(x)=\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}$　　D．$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

3．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x}=$（　　）.

A．e^{2}　　B．e^{-2}　　C．$2\mathrm{e}$　　D．$2\mathrm{e}^{-1}$

4．设函数 $\mathrm{y}=f(g(x))$ 可导，且 $g(x_0)=t_0, g'(x_0)=1, f'(t_0)=1$，当 $\Delta x\to 0$ 时 $\mathrm{y}=f(g(x))$ 在 x_0 处的微分 dy 与 Δx 相比较是（　　）无穷小.

A．等价　　B．低阶　　C．高阶　　D．同阶但不等价

5．已知 $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-x^2}}{(x^2+\frac{1}{2})^2}dx$，则关于此反常积分下列说法正确的是（　　）.

A．此反常积分收敛且值为 $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$　　B．此反常积分收敛且值为 $\sqrt{\pi}$

C．此反常积分收敛且值为 0　　D．此反常积分发散

6．曲线 $y=\int_0^{x}\tan t dt+1,(0\le t\le\dfrac{\pi}{4})$ 的弧长是（　　）.

A．$\ln(1+\sqrt{2})$　　B．$\ln(\sqrt{2}-1)$　　C．$1+\ln 2$　　D．$1+\ln\sqrt{2}$

7．$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x t|\cos t|dt}{x^2}=$（　　）.

A．$\dfrac{1}{\pi}$　　B．$\dfrac{1}{\pi^2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．1

8．下列说法错误的是（　　）.

A．若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上可导，且 $f'(x)$ 为奇函数，则 $f(x)$ 一定是偶函数

B．若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上可导，且 $f'(x)$ 为偶函数，$f(0)=0$，则 $f(x)$ 一定是奇函数

C．若 $f(x)$ 在 $[-\infty,+\infty]$ 内可导，且 $f'(x)$ 具有周期 T，$f(T)=0$，则 $f(x)$ 一定是周期函数

D．若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)$ 有界，则 $f(x)$ 在 (a,b) 一定有界

9．已知 $[x]$ 表示 x 的最大整数部分，则 $\lim\limits_{x\to0}2x\left[\dfrac{2}{x}\right]=$（　　）.

A．0　　B．2　　C．4　　D．不存在

10．设 $y=f(x)$ 满足方程 $e^y+\sin x=xy+1$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_x^{2x}f(t)dt}{x^2}=$（　　）.

A．0　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．-3　　D．$-\dfrac{3}{2}$

二、填空题（共 7 题，4 分/题）

1．极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)=$_____.

2．设函数 $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{\sin\pi x}$，则 $f(x)$ 有_____个可去间断点.

3．函数 $f(x)=3x^2+ax+2$ 在区间 $x=1$ 处取得极小值，则 $a=$_____.

4．设 $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$，则 $f'(1)+f(1)=$_____.

5．$\int_0^{+\infty} e^{-x}|\sin x|dt=$_____.

6．函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'''-3y''+3y'-y=0$ 的解，且 $y(x)$ 在点 $(0,0)$ 的曲率圆为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$，则 $y(x)=$_____.

7．函数 $f(x)$ 连续,且满足 $f''(x)=f(x)$, $\int_0^{\ln 2} f(x)dx=0$, $f(0)=1$,则 $f^{(2025)}(2025)=$_____.

三、解答题（共 3 题，14 分/题）

1．设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$.

（1）求 a 的值；（7 分）

（2）计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3f(x)}{x^3}$.（7 分）

2．设 $f(x)$ 满足 $e^{-x}-\frac{x^2}{2}=1+\int_0^{-x} f(t)dt$，

（1）求 $f'(x)$；（7 分）

（2）求 $f(x)$ 在 R 内的最小值．（7 分）

3．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)=-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+1$．证明: $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$．

参 考 答 案

一、选择题

1、D

【参考解析】

由题意结合根式与反三角函数的定义域得 $\ln(4-x^2)\geq 0$，$-1\leq x-1\leq 1$ 同时成立，解得 $\{x\,|\,0\leq x\leq\sqrt{3}\}$，答案为选项 D.

2、C

【参考解析】

偶函数的满足定义域关于原点对称，且 $f(-x)=f(x)$；四个选项定义域都满足关于原点对称；

选项 A：$f(-x)=-x^2\sin x^3=-f(x)$，奇函数；

选项 B：$f(-x)=-x\cos x^3=-f(x)$ 奇函数；

选项 C：$f(-x)=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}=f(x)$ 偶函数；

选项 D：$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$ 奇函数；

答案为选项 C.

3、B

【参考解析】

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{-x}\right)^{\frac{-x}{2}}\right]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$，答案为选项 B.

4、A

【参考解析】

$dy\big|_{x=x_0}=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)dx=\Delta x$，故当 $\Delta x\to 0$ 时，dy 与 Δx 为等价无穷小.

5、B

【参考解析】

原积分 $=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{2x}\cdot\frac{2x}{(x^2+\frac{1}{2})^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{2x}d(2-\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}})=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

6、A

【参考解析】

由 $y=\int_0^x\tan tdt+1$ 可得 $y'(x)=\tan x$，结合平面曲线的弧长公式

$s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec xdx=\ln(1+\sqrt{2})$，即选项 A 正确.

7、A

【参考解析】

设 $f(x)=\int_0^x t|\cos t|dt$ 得 $f(x)$ 单增，当 $n\pi\le x\le(n+1)\pi\Rightarrow f(n\pi)\le f(x)\le f((n+1)\pi)$

$f(n\pi)=\int_0^{n\pi}t|\cos t|dt$，区间再现 $\Rightarrow f(n\pi)=n\pi\int_0^{n\pi}|\cos t|dt-f(n\pi)$

$\Rightarrow f(n\pi)=n^2\pi$

同理，$f((n+1)\pi)=(n+1)^2\pi\Rightarrow\begin{cases}n^2\pi^2\le x^2\le(n+1)^2\pi^2\\ n^2\pi\le f(x)\le(n+1)^2\pi\end{cases}\Rightarrow\frac{n^2\pi}{(n+1)^2\pi^2}\le\frac{f(x)}{x^2}\le\frac{(n+1)^2\pi}{n^2\pi^2}$

$x\to+\infty,n\to\infty$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\frac{1}{\pi}$.

8、C

【参考解析】

周期函数的原函数是周期函数的充要条件为 $\int_0^T f'(x)dx=f(T)-f(0)=0$ ，故 C 错误．举例：

$f(x)=x-2$, $f'(x)=1$ 选择周期为 2.

9、C

【参考解析】

由取整函数的定义可知$\frac{2}{x}-1<\left[\frac{2}{x}\right]\le\frac{2}{x}$

当$x>0$时，$2x(\frac{2}{x}-1)<2x\left[\frac{2}{x}\right]\le 2x\cdot\frac{2}{x}$，即$4-2x<2x\left[\frac{2}{x}\right]\le 4$，由夹逼定理可得右极限等于 4，

同理可得左极限也等于 4，故选 C 项.

10、D

【参考解析】

$y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=-1$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{2x}f(t)dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2f(2x)-f(x)}{2x}=2\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{2x}-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{3}{2}f'(0)=-\frac{3}{2}$$

，故选 D 项.

二、填空题

1、 $\frac{1}{2}$

【参考解析】

因为$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}<\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}$，又

$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(1+n)}{n^2+n}=\frac{1}{2}$，且$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(1+n)}{n^2+1}=\frac{1}{2}$，

所以$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}$.

2、 2（或者两）

【参考解析】

结合题目和间断点的知识考查$x=0, x=2$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{\sin\pi x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{\pi x}=-\frac{2}{\pi},$$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{\sin \pi x}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)}{\pi x}\overset{t=x-2}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t(t+2)}{\sin \pi(t+2)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t(t+2)}{\sin \pi t}=\dfrac{2}{\pi}$，

所以 $f(x)$ 有 $x=0,x=2$ 这 2 个可去间断点，其余间断点为无穷间断点.

3、 $\underline{\quad -6 \quad}$

【参考解析】

由题意极值的必要条件，可导的极值点一定为驻点则 $f'(1)=0$，又 $f'(x)=6x+a$，

即 $f'(1)=6+a=0$，所以 $a=-6$.

4、 $\underline{\quad -9! \quad}$

【参考解析】

$f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$ 令 $g(x)=(x-2)\cdots(x-10)$，$\Rightarrow f'(x)=g(x)+(x-1)g'(x)$

$f'(1)=g(1)=-9!\,f(1)=0$，故答案为 $-9!$.

5、 $\underline{\quad \dfrac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)} \quad}$

【参考解析】

原积分 $\mathrm{I}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}|\sin x|dx$ 令 $x-k\pi=t\Rightarrow \mathrm{I}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}e^{-k\pi}\int_0^{\pi}e^{-t}\sin t dt=\dfrac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$.

6、 $\underline{\quad -xe^x+2x^2e^x \quad}$

【参考解析】

特征方程 $r^3-3r^2+3r-1=0$ 即 $(r-1)^3=0\Rightarrow$ 原方程的通解 $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^x$

又由曲率圆方程得 $y(0)=0,y'(0)=-1,y''(0)=2$，带入得 $y=-xe^x+2x^2e^x$.

7、 $\underline{\quad -e^{2025}-2e^{-2025} \quad}$

【参考解析】

由于 $f''(x)=f(x)$ 是一个二阶常系数线性微分方程，其特征方程为 $r^2-1=0\Rightarrow r_{1,2}=\pm1$，

则通解为 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$，将其代入 $\int_0^{\ln 2}f(x)dx=0$，$f(0)=1$ 这两个条件可得：

$$\begin{cases}C_1+\dfrac{1}{2}C_2=0\\ C_1+C_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=-1\\ C_2=2\end{cases}\text{,则 }f(x)=-e^x+2e^{-x}$$

因此 $f^{(2025)}(2025)=-e^{2025}-2e^{-2025}$.

三、解答题

1、【参考解析】

由题意得

（1）利用公式将函数展开变成麦克劳林级数形式得：

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}-x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(ax^2)^n=(a-\frac{1}{3})x^3+o(x^3)$，因为 $f'''(0)=1$ 麦克劳林级数中 x^3 的系数为 $\frac{f'''(0)}{3!}$，显然 $\frac{f'''(0)}{3!}=(a-\frac{1}{3})$，$f'''(0)=1$，故 $a=\frac{1}{2}$.

（2）$\lim\limits_{x\to0}\frac{3f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3[\frac{1}{6}x^3+o(x^3)]}{x^3}=\frac{1}{2}$.

2、【参考解析】

（1）对 $e^{-x}-\frac{x^2}{2}=1+\int_0^{-x}f(t)dt$ 对两边求导得 $-e^{-x}-x=-f(-x)$

令 $t=-x$，则 $f(t)=e^t-t$，即 $f(x)=e^x-x$，$f'(x)=e^x-1$

（2）令 $f'(x)=e^x-1=0$，解得 $x=0$，再求二阶导数得 $f''(x)=e^x$，当 $x=0$ 时 $f''(0)=1>0$，

故 $x=0$ 是极小值点也为最小值点，代入得最小值等于 $f(0)=e^0-0=1$.

3、【参考解析】

证明：对 $f(x)=-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+1$ 方程两边同时求导得 $f'(x)=-f(x)$，一阶线性微分方程通解为 $f(x)=C\,\mathrm{e}^{-x}$，又 $f(0)=1$, 即 $C=1$, 所以 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$.