华教杯大学生数学竞赛
HUA JIAO BEI DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI

2025 年第八届华教杯大学生数学竞赛

初赛试题（非数学类专业组）

☆注 意 事 项☆

1．参赛对象：全国在校大学生（包括本科生，研究生及专科生）均可报名参赛

2．竞赛官网：www.cecmath.com

3．因试题整理时间有限，如在使用过程中发现编辑、题目错误等情况，请与我们联系修正

4．联系电话：13248083435（微信同号）

竞赛官网　　微信公众号　　参赛咨询微信

一、选择题（共 10 题，3 分/题）

1．设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-2025)$，则 $f'(0)=$（　　）.

A．2025　　B．2025!　　C．$-(2025!)$　　D．-2025

2．$f(x)=1+\frac{1}{2}\int_0^x f(1-y)f(x-y)dy$，其中 $f(x)$ 连续，则 $\int_0^1 f(x)dx=$（　　）.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

3．函数 $y=y(x)$ 由方程 $|x|y+e^y=e$ 确定，则下列关于点 $x=0$ 说法正确的是（　　）.

A．可导点，$y(0)$ 不是极值　　B．不可导点，$y(0)$ 不是极值

C．不可导点，$y(0)$ 是极大值　　D．可导点，$y(0)$ 是极大值

4．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=A$，则 $\lim\limits_{h\to0^+}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(1-x)dx=$（　　）.

A．$\frac{\pi}{2}f(0)$　　B．$\frac{A}{2}\pi$　　C．$\frac{\mathrm{A}}{2}f(0)$　　D．$\frac{A}{2}$

5．已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ 共线，且满足 $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$，$\vec{e}=\vec{i}$，则 $\vec{a}\times\vec{e}=$（　　）.

A．$-2\vec{j}+2\vec{k}$　　B．$-2\vec{j}+4\vec{k}$　　C．$2\vec{j}+4\vec{k}$　　D．$2\vec{j}-4\vec{k}$

6．已知三角形 ABC 的三个顶点坐标分别是 $A(1,2,3),B(3,4,5),C(2,4,7)$，则该三角形的面积等于（　　）.

A．$\sqrt{7}$　　B．$\frac{\sqrt{7}}{2}$　　C．$\sqrt{14}$　　D．$\frac{\sqrt{14}}{2}$

7．设 $f(u,v)$ 有连续偏导数且 $f(0,0)=0$，则下列等式中成立的是（　　）.

A．$f(x,y)=x\int_0^1\frac{\partial f(tx,y)}{\partial u}dt$　　B．$f(x,y)=x\int_0^1\frac{\partial f(tx,ty)}{\partial u}dt+y\int_0^1\frac{\partial f(tx,ty)}{\partial v}dt$

C．$f(x,y)=y\int_0^1\frac{\partial f(x,ty)}{\partial v}dt$　　D．$f(x,y)=x\int_0^1\frac{\partial f(tx,y)}{\partial u}dt+y\int_0^1\frac{\partial f(x,ty)}{\partial v}dt$

8．下列级数的收敛半径最大的是（　　）.

A．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}}{\sqrt{n+1}}x^{n}$　　B．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{n}}{n\cdot 2^{n}}$　　C．$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n^{3}}$　　D．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n}-(-1)^{n}}{n^{2}}x^{n}$

9．二元函数 $z=x^{2}+y^{2}+2x+y-1$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^{2}+y^{2}\le 1\}$ 上的最值之和等于（　　）.

A．-1　　B．0　　C．1　　D．-2

10．$\iint_{\Sigma}3xdydz+3ydzdx+3zdxdy=$（　　），其中 $\Sigma:z=-\sqrt{9-x^{2}-y^{2}}$，方向指向曲面的下侧.

A．9π　　B．162π　　C．81π　　D．36π

二、填空题（共 7 题，4 分/题）

1．函数 $f(x)=x\sqrt{2-x}$ 在区间 $[0,2]$ 上满足罗尔定理的 $\xi=$_____.

2．设 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\cdot\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 满足在 $x=0$ 处一阶可导且一阶导数连续，但二阶不可导，求 α 的范围为_____.

3．设 $y_{1}=e^{x}-e^{-x}\sin 2x, y_{2}=e^{x}$ 是某二阶常系数非齐次线性方程的两个解，则该微分方程是_____.

4．曲线 $x=1+\sin t$，$y=2\cos t, z=t$ 在点 $(2,0,\frac{\pi}{2})$ 处的法平面方程是_____.

5．设 $(ax^{2}\sin y+y^{3}\sin x)dx+(by^{2}\cos x+x^{3}\cos y)dy=0$ 在整个 xoy 平面内是全微分方程，则 $a=$_____，$b=$_____.

6．设 D 是由 $x^2+y^2=1$ 所围成第一象限的区域，则 $\iint_D \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dxdy=$_____.

7．已知直线 $L:\begin{cases}2x+y+3z-4=0\\3x+By+z+D=0\end{cases}$ 在 xoy 平面上，则 $B=$_____，$D=$_____.

三、解答题（共 3 题，14 分/题）

1．设 $y(x)$ 满足 $y''(x)+2y'(x)+y(x)=0$，且 $y(0)=0, y'(0)=1$.

（1）求 $y(x)$；（7 分）

（2）计算积分 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$.（7 分）

2．设 $x_1=16$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n+20}(n=1,2,\cdots)$, 证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求此极限.

3．已知空间曲线 C 由以下方程组定义：$\begin{cases}x^2+y^2-z=0\\x+y+z=4\end{cases}$.

（1）求曲线 C 在点 $P(1,1,2)$ 处的切线方程和法平面方程；（6 分）

（2）求曲线 C 上的点到 xoy 平面的最大距离和最小距离.（8 分）

参 考 答 案

一、选择题

1、C

【参考解析】

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-2025)}{x}=-(2025!)$$

或者利用导数的四则运算

$$f'(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-2025)+x(x-2)\cdots(x-2025)+\cdots+x(x-1)(x-2)\cdots(x-2024),$$

$$f'(0)=(0-1)(0-2)\cdots(0-2025)=-(2025!)$$

故答案为选项 C.

2、C

【参考解析】

结合区间再现，等式两边在区间[0，1]积分化简得

$$\int_0^1 f(x)dx=1+\frac{1}{2}\int_0^1 f(1-y)dy\int_y^1 f(x-y)dx$$

记 $\mathrm{I}=\int_0^1 f(1-y)dy\int_y^1 f(1-x)dx$ 令 $1-x=t\Rightarrow$

$$\mathrm{I}=\int_0^1\left[f(1-y)\int_0^{1-y}f(x)dx\right]dy=\int_0^1\left[\int_0^{1-y}f(x)dx\right]d\left[\int_0^{1-y}f(x)dx\right]=\frac{1}{2}\left[\int_0^{1-y}f(x)dx\right]^2\Big|_0^1\Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=1+\frac{1}{4}\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=2$$

故答案为选项 C.

3、C

【参考解析】

当 $x\geq 0$ 时，$xy+e^y=e\Rightarrow y'_+(0)=-\frac{1}{e}$，当 $x<0$ 时，$-xy+e^y=e\Rightarrow y'_-(0)=\frac{1}{e}$，故 $x=0$ 是不可导点，$\lim_{x\to 0^+}\frac{y(x)-y(0)}{x}=-\frac{1}{e}<0$，由保号性得 $y(x)<y(0)$，$\lim_{x\to 0^-}\frac{y(x)-y(0)}{x}=\frac{1}{e}>0$

同理，由保号性得 $y(x)<y(0)$，所以 $y(0)$ 是极大值点.

4、B

【参考解析】

$f(x)$ 在[0,1]上连续$\Rightarrow \exists M>0, s.t.|f(x)|\le M$, $\lim\limits_{h\to 0^+}\int_0^1 \dfrac{h}{h^2+x^2}f(1-x)dx=I$，

令$1-x=t\Rightarrow$

$$I=\lim_{h\to 0^+}\left[\int_0^{1-h^{\frac{1}{4}}}\frac{h}{h^2+(1-t)^2}f(t)dt(\text{记}I_1)+\int_{1-h^{\frac{1}{4}}}^1\frac{h}{h^2+(1-t)^2}f(t)dt(\text{记}I_2)\right]\Rightarrow$$

$$0\le|I_1|\le=M\int_0^{1-h^{\frac{1}{4}}}\frac{h}{h^2+(1-t)^2}dt=-M\arctan\frac{1-t}{h}\Big|_{t=0}^{t=1-h^{\frac{1}{4}}}=-M\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

由积分中值定理$\Rightarrow I_2=f(\xi)\int_{1-h^{\frac{1}{4}}}^1\frac{h}{h^2+(1-t)^2}dt=-f(\xi)\arctan\frac{1-t}{h}\Big|_{t=1-h^{\frac{1}{4}}}^{t=1}=\frac{\pi}{2}f(\xi)$

其中$\xi\in(1-h^{\frac{1}{4}},1)$当$h\to 0,\xi\to 1^-$，又有$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=A$，故$I=I_1+I_2=\dfrac{A}{2}\pi$.

5、C

【参考解析】

由向量 $\vec{a}$ 与$\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$共线，可设$\vec{a}=(t,-2t,t)$，由$\vec{a}\cdot\vec{b}=12$

可得$\vec{a}\cdot\vec{b}=t+4t+t=12$，因此$t=2$，从而$\vec{a}=(2,-4,2)$，$\vec{a}\times\vec{e}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-4&2\\1&0&0\end{vmatrix}=2\vec{j}+4\vec{k}$

故答案为选项C.

6、C

【参考解析】

由$\overrightarrow{AB}=(2,2,2),\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$，可得$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&2&2\\1&2&4\end{vmatrix}=4\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$

所以该三角形的面积等于$\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}$，故答案为选项C.

7、B

【参考解析】

令 $g(t)=f(xt,yt)$

$$g'(t)=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{d(xt)}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{d(yt)}{dt}=x\cdot\frac{\partial f(xt,yt)}{\partial u}+y\cdot\frac{\partial f(xt,yt)}{\partial v}$$

$$f(x,y)=g(1)-g(0)=\int_0^1 g'(t)dt=\int_0^1[x\cdot\frac{\partial f(xt,yt)}{\partial u}+y\cdot\frac{\partial f(xt,yt)}{\partial v}]dt$$

化简得 $f(x,y)=x\int_0^1\frac{\partial f(tx,ty)}{\partial u}dt+y\int_0^1\frac{\partial f(tx,ty)}{\partial v}dt$，故答案为选项 B.

8、B

【参考解析】

由级数收敛半径的计算公式 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$，$R=\frac{1}{\rho}$ 代入 A,B,C,D 得

A：$a_n=\frac{2^n}{\sqrt{n+1}}$，$R=\frac{1}{2}$，B：$a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}$，$R=2$，C 是缺项幂级数（只有奇数项），

需要对通项用比值法 $u_n=(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n^3},R=x^2$，当$x^2<1$时级数收敛，故$R=1$

D：$a_n=\frac{e^n-(-1)^n}{n^2}$，$R=\frac{1}{e}$，故答案为选项 B.

9、B

【参考解析】

令 $z'_x=0,z'_y=0$ 得 $x=-1,y=-\frac{1}{2}$，这时 $x^2+y^2=\frac{5}{4}$ 不在区域内部，故内部无极值点，考虑边界

$x^2+y^2=1$ 利用拉格朗日乘数法设 $L=x^2+y^2+2x+y-1+\lambda(x^2+y^2-1)$ 求偏导并联立得

$x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}},y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ 代入得最大值等于 $\sqrt{5}$，最小值等于 $-\sqrt{5}$，故答案为选项 B.

10、B

【参考解析】

$\iint\limits_{\Sigma} 3xdydz+3ydzdx+3zdxdy=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)ds=9\iint\limits_{\Sigma}ds=162\pi$，故答案为选项 B.

二、填空题

1、 $\dfrac{4}{3}$

【参考解析】

已知 $f(x)=x\sqrt{2-x}$ 在区间 $[0,2]$ 连续，$f(x)=x\sqrt{2-x}$ 在区间 $(0,2)$ 可导，

$f(0)=f(2)=0$，则至少存在 $\xi\in(0,2)$，$f'(\xi)=0$，

而 $f'(x)=\sqrt{2-x}-\dfrac{x}{2\sqrt{2-x}}=\dfrac{4-3x}{2\sqrt{2-x}}$，令 $f'(x)=0$，$x=\xi=\dfrac{4}{3}$.

2、 $2<\alpha\le 3$

【参考解析】

原函数的连续性：由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}=0\Rightarrow\alpha>0$

可导性：$f'(0)$ 存在 $\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}$ 存在 $\Rightarrow\alpha>1$，且此时 $f'(0)=0$

一阶导数连续性：即 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\dfrac{1}{x}=0\Rightarrow\alpha>2$

二阶不可导：$f''(0)$ 不存在，即 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha x^{\alpha-2}\sin\dfrac{1}{x}-x^{\alpha-3}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在 $\Rightarrow\alpha\le 3$.

3、 $y''+2y'+5y=8e^{x}$

【参考解析】

由解的性质与结构知 $y_2-y_1=e^{-x}\sin 2x\Rightarrow$ 齐次方程的解为 $r=-1\pm 2i\Rightarrow$

所求方程为 $y''+2y'+5y=f(x)$，带入 $y_2\Rightarrow f(x)=8e^{x}\Rightarrow y''+2y'+5y=8e^{x}$.

4、 $-2y+z-\dfrac{\pi}{2}=0$

【参考解析】

$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}=0,\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-2\sin\frac{\pi}{2}=-2,\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=1$，可得：$-2y+z-\frac{\pi}{2}=0$.

5、 $a=3,\ b=-3$

【参考解析】

由于$(ax^2\sin y+y^3\sin x)dx+(by^2\cos x+x^3\cos y)dy=0$在整个$xoy$平面内是全微分方程的

充要条件为$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，在本题中$P=ax^2\sin y+y^3\sin x, Q=by^2\cos x+x^3\cos y$

所以由$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$得$ax^2\cos y+3y^2\sin x=-by^2\sin x+3x^2\cos y\Rightarrow a=3,b=-3$.

6、 0

【参考解析】

由于积分区域是部分圆域，故用极坐标计算较为方便

$$\iint_D\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta}{\rho^2}\rho d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta d\theta\int_0^1\rho d\rho$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2}\rho^2\Big|_0^1=0.$$

7、 $B=\frac{3}{2},D=-6$

【参考解析】

已知直线在xoy平面上，则有$\begin{cases}2x+y-4=0\\3x+By+D=0\end{cases}$且$\frac{2}{3}=\frac{1}{B}=\frac{-4}{D}$，则$B=\frac{3}{2},D=-6$.

三、解答题

1、【参考解析】

（1）首先求解微分方程 $y''(x)+2y'(x)+y(x)=0$ ，特征方程为 $r^2+2r+1=0$ ，

即 $(r+1)^2=0$ ，得二重根 $r=-1$ ；易得通解： $y(x)=(C_1+C_2x)e^{-x}$ 代入初始条件

$y(0)=0, y'(0)=1$ 得 $y(x)=xe^{-x}$.

（2） $\int_0^{+\infty} y(x)dx=\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx=-\int_0^{+\infty} xde^{-x}=-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$

第一项 $-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}=0$ ，第二项 $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1$ ，故 $\int_0^{+\infty} y(x)dx=1$.

2、【参考解析】

证明：某个正整数 k 有 $x_k>x_{k+1}$ ，则有 $x_{k+1}=\sqrt{x_k+20}>\sqrt{x_{k+1}+20}=x_{k+2}$ ，由数学归纳法可知对一切正整数 n 有 $x_n>x_{n+1}$ ，即 $\{x_n\}$ 单调递减.又 $x_n>0$ ， $\{x_n\}$ 有下界，根据单调有界收敛准则数列 $\{x_n\}$ 收敛；设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ ， $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n+20}$ ，即 $a=\sqrt{a+20}$ ，解得 $a=5, a=-4$ （舍去）， $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=5$.

（或者证明 $x_1=16$ ， $x_2=\sqrt{16+20}=6$ 知 $x_1>x_2$ ，即 $x_1-x_2<0$

$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n+20}-\sqrt{x_{n-1}+20}=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{x_n+20}+\sqrt{x_{n-1}+20}}$ 即 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号，又

$x_1-x_2<0$ 所以 $x_{n+1}-x_n<0$ 即 $x_n>x_{n+1}$.即 $\{x_n\}$ 单调递减.又 $x_n>0$ ， $\{x_n\}$ 有下界，根据单调有界收敛准则数列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ ， $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n+20}$ ，即 $a=\sqrt{a+20}$ ，解得 $a=5, a=-4$ （舍去）， $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=5$.)

3、【参考解析】

（1）该曲线是两张曲面的交线。设变量 x 为曲线方程的参数，即视方程组中 $y=y(x), z=z(x)$ ，

对方程组两边关于 x 求导，并整理得 $\begin{cases} 2y\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dz}{dx}=-2x \\ \dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=-1 \end{cases}$ 解得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x-1}{2y+1}, \dfrac{dz}{dx}=-1-\dfrac{-2x-1}{2y+1}$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{(1,1,2)}=\frac{-2x-1}{2y+1}\Big|_{(1,1,2)}=-1, \frac{dz}{dx}\Big|_{(1,1,2)}=[-1-\frac{-2x-1}{2y+1}]\Big|_{(1,1,2)}=0$$

所以 $\vec{T}=(1,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx})\Big|_{(1,1,2)}=(1,-1,0)$

曲线 C 在点 $P(1,1,2)$ 处的切线方程为 $\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}\\ z=2\end{cases}$

曲线 C 在点 $P(1,1,2)$ 处的法平面方程为 $(x-1)-(y-1)-0\cdot(z-2)=0$，即 $x-y=0$.

（2）曲线 C 上的点到 xoy 平面的距离设为 d，即 $d=|z|$，曲线 C 上的点到 xoy 平面的最大距离和最小距离即为 $d^2=z^2$ 在 $x^2+y^2-z=0$ 和 $x+y+z=4$ 的约束条件下的极值

构建拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4)$

求偏导 $\begin{cases}L_x=2\lambda x+\mu=0\\ L_y=2\lambda y+\mu=0\\ L_Z=2z-\lambda+\mu=0\\ L_\lambda=x^2+y^2-z=0\\ L_\mu=x+y+z-4=0\end{cases}$

解得驻点为 $(-2,-2,8)$，$(1,1,2)$

即最大距离 $d=|z|=8$，最小距离 $d=|z|=2$.