



华教杯全国大学生数学竞赛
HUA JIAO BEI GUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SA

2023 年第六届华教杯全国大学生数学竞赛

决赛试题（非数学类专业组）

☆ 注 意 事 项 ☆

1. 参赛对象：全国在校大学生（包括本科生，研究生及专科生）均可报名参赛
2. 竞赛官网：www.cecmath.com
3. 竞赛组别：非数学类专业组、数学类专业组、专科生组
4. 因试题整理时间有限，如在使用过程中发现编辑、题目错误等情况，请与我们联系修正。
5. 联系电话：13248083435（微信同号）；联系QQ：3007715383



竞赛官网



微信公众号



参赛咨询微信

一、选择题 (10 题、3 分/题)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \sin(2n!e\pi)) = (\quad)$.

- A. π B. 2π C. 3π D. $e\pi$

2. 设 $f(x)$ 满足方程 $e^{xy} + y = 2x + 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{2x} f(t) dt}{x^2} = (\quad)$.

- A. 0 B. 1 C. 3 D. $\frac{1}{2}$

3. 过点 $(-1, e)$ 作曲线 $y = e^{-x}$ 的切线 l , 该曲线与切线 l 及 x 轴所围成的无界图形的面积为 $(\quad)$.

- A. $\frac{e}{2}$ B. $\frac{e}{3}$ C. $\frac{e}{4}$ D. e

4. 设 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, 则 $\iint_D (x^2 - y^2)^{2023} dx dy = (\quad)$.

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2023}$ B. $\frac{1}{2024}$ C. 0 D. $\left(\frac{1}{2023}\right)^2$

5. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$ 的收敛域是 $(\quad)$.

- A. $[-1, 1)$ B. $[-1, 1]$ C. $(-1, 1]$ D. $(-1, 1)$

6. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\cos 2x - \frac{a + 9x^2}{a + 4x^2} = o(x^2)$, 则 $a = (\quad)$.

- A. $-\frac{2}{5}$ B. -5 C. $-\frac{5}{2}$ D. -2

7. 不定积分 $\int \frac{x^{2023}}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2023}}{2023!}} dx = (\quad)$.

华教杯全国大学生数学竞赛

HUA JIAO BEI GUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI

A. $2023! \left[x - \ln(1+x) + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2023}}{2023!} \right] + C$

B. $2023! \left[x + \ln(1+x) + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2023}}{2023!} \right] + C$

C. $2024! \left[x - \ln(1+x) + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2024}}{2024!} \right] + C$

D. $2024! \left[x + \ln(1+x) + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2024}}{2024!} \right] + C$

8. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{n}{n^2+1}} + \frac{\sin \frac{2}{n}}{\frac{n}{n^2+2}} + \dots + \frac{\sin \frac{n}{n}}{\frac{n}{n^2+n}} \right) = (\quad)$.

A. 0 B. 1 C. $\sin 1$ D. $1 - \cos 1$

9. 设 $AX = B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, 则 $X = (\quad)$.

A. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}^T$ B. $\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}^T$ C. $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}^T$ D. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}^T$

10. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$, 则 $f(x_1, x_2, x_3) = 2$ 在空间直角坐标系下表示的二次曲面为 ().

A. 单叶双曲面 B. 双叶双曲面 C. 椭球面 D. 柱面

二、填空题 (7 题、4 分/题)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3(1 + \cos x)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^n x \right]^n$ 的收敛半径为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 已知 $f'(1) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2[f(2-x) - f(1)]} = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 若 $f(x)$ 为连续函数, a 是正常数, 则初值问题 $\begin{cases} y' + ay = f(x) \\ y|_{x=0} = 0 \end{cases}$ 的解 $y(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 已知 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$, $x_0 > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (e^{\frac{k^2}{n^3}} - 1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 已知区域 D 是由曲线 $y = (x-1)(x-2)$ 与 x 轴围成, 则该区域绕 y 轴旋转一周得到的旋转体体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题 (3 题、14 分/题)

HUA JIAO BEI QUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI

1. 已知 n 阶矩阵 A 、 B 满足 $3A^{-1}B = B - 5E$, 求 $(A - 3E)^{-1}$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 证明:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\sin A}{\cos \frac{B+C}{2} + \cos \frac{B-C}{2}} + \frac{\sin B}{\cos \frac{C+A}{2} + \cos \frac{C-A}{2}} + \frac{\sin C}{\cos \frac{A+B}{2} + \cos \frac{A-B}{2}} \right) \leq 1.$$

3. 设两直线分别为 $L_1: y = nx + \frac{1}{n}$, $L_2: y = (n+1)x + \frac{1}{n+1}$, 其交点的横坐标为 a_n .

(1) 求 L_1, L_2, y 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所得几何体的体积 V_n .

(2) 如果当 $n \rightarrow \infty$ 时 V_n 是 a_n 的等价阶无穷小, 求 k 和极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{a_n^k}$.

华教杯全国大学生数学竞赛

HUA JIAO BEI QUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI

参 考 答 案

一、选择题

1. 【答案】B

【参考解析】

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \text{ 所以 } n!e = n! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = n! + \frac{n!}{1!} + \dots + \frac{n!}{n!} + \frac{1}{n+1} + \dots$$

$$\sin(2n!e\pi) = \sin\left(z + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots\right)2\pi = \sin\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots\right)2\pi \sim \sin \frac{2\pi}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n \sin(2n!e\pi)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} = 2\pi.$$

2. 【答案】C

【参考解析】

$$y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 2, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{2x} f(t)dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(2x) - f(x)}{2x} = 3.$$

3. 【答案】A

【参考解析】

$$y' = -e^{-x}|_{x=-1} = -e, \quad L \text{ 的方程为 } y - e = -e(x+1), \Rightarrow y = -ex, \text{ 面积为}$$

$$A = \int_{-1}^0 (e^{-x} + xe^{-x})dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \frac{1}{2}e.$$

4. 【答案】C

【参考解析】

$$\text{令 } u = x + y, v = y - x. D: -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1, J = \frac{1}{2}$$

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 (uv)^{2023} dudv = 0.$$

5. 【答案】D

【参考解析】

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}} = 1 \text{ 端点 } \pm 1 \text{ 处发散, 故收敛域为 } (-1, 1)$$

6. 【答案】C

【参考解析】

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4),$$

$$\frac{a+9x^2}{a+4x^2} = \frac{9}{4} - \frac{5}{4} \frac{1}{1 + (\frac{2}{\sqrt{a}}x)^2} = 1 + \frac{5x^2}{a} - \frac{20x^4}{a^2} + o(x^4),$$

$$\text{则 } \frac{5}{a} = -2, \text{ 故 } a = -\frac{5}{2}.$$

7. 【答案】A

【参考解析】

设 $P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2023}}{2023!}$, 则 $x^{2023} = 2023![P(x) - P'(x)]$, 则

$$\text{原式} = \int \frac{2023![P(x) - P'(x)]}{P(x)} dx = 2023![x - \ln P(x)] + C$$

$$= 2023![x - \ln(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2023}}{2023!})] + C.$$

8. 【答案】D

【参考解析】

$$\text{由于 } \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i}{n}}{n+1} \leq \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i}{n}}{n + \frac{i}{n}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i}{n}}{n}, \text{ 而}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} = \int_0^1 \sin x dx = 1 - \cos 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} = \int_0^1 \sin x dx = 1 - \cos 1, \text{ 因此 } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\sin \frac{1}{n}}{n^2+1} + \frac{\sin \frac{2}{n}}{n^2+2} + \dots + \frac{\sin \frac{n}{n}}{n^2+n} \right) = 1 - \cos 1.$$

9. 【答案】B

【参考解析】

$$\text{由 } X = A^{-1}B, \text{ 构造矩阵 } (A|B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix},$$

初等行变换得

$$(A|B) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}, \text{ 所以 } X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 2 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

10. 【答案】C

【参考解析】

$$\text{二次型 } f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \text{ 对应的矩阵 } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 根据}$$

$|\lambda E - A| = 0$ 可以求得特征值为, $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \lambda_1 = 5, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$,

因此二次型的标准形为 $f = 4y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$,

故可得 $4y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 2$, 因此对应的曲面为椭球面, 选择 C.

二、填空题

1. 【答案】 $\frac{1}{4}$

【参考解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2} x^2}{x^3} = \frac{1}{4}.$$

2. 【答案】 $\frac{1}{e}$

【参考解析】

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$, 此幂级数的收敛半径 $R = \frac{1}{e}$.

3. 【答案】 $-\frac{1}{4}$

【参考解析】

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2[f(2-x)-f(1)]} = \lim_{x \rightarrow 1} (-\frac{1}{2}) \frac{1-x}{f(2-x)-f(1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (-\frac{1}{2}) \frac{1}{\frac{f(1+(1-x))-f(1)}{1-x}} = -\frac{1}{4}.$$

4. 【答案】 $e^{-ax} \int_0^x f(t) e^{at} dt$

【参考解析】

题设方程的通解为 $y = e^{-\int ax} (\int f(x) e^{ax} dx + C) = e^{-ax} [F(x) + C]$, 其中 $F(x)$ 是 $f(x)e^{ax}$ 的任一原函数, 代入 $y(0) = 0$, 得 $C = -F(0)$, 所求特解为 $y(x) = e^{-ax} [F(x) - F(0)] = e^{-ax} \int_0^x f(t) e^{at} dt$.

华教杯全国大学生数学竞赛

5. 【答案】 $\sqrt{2}$

【参考解析】

因为 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{2}{x_n}} = \sqrt{2}$, 所以 $\{x_n\}$ 有下界. 又因为 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{x_n^2}) \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1$,

所以 $\{x_n\}$ 单调递减, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$, 可得 $l = \frac{1}{2}(l + \frac{2}{l})$,

解得 $l = \sqrt{2}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$.

6. 【答案】 $\frac{1}{3}$

【参考解析】

由带有皮亚诺余项的麦克劳林公式, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (e^{\frac{k^2}{n^3}} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k^2}{n^3} + o\left(\frac{k^2}{n^3}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n o\left(\frac{k^2}{n^3}\right) = \frac{1}{3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n o\left(\frac{k^2}{n^3}\right)$$

$$\leq \frac{1}{3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}. \quad \text{且} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (e^{\frac{k^2}{n^3}} - 1) > \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

$$\text{故由夹逼准则得} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (e^{\frac{k^2}{n^3}} - 1) = \frac{1}{3}.$$

7. 【答案】 $\frac{\pi}{2}$

【参考解析】

$$V_y = 2\pi \int_a^b x |f(x)| dx = -2\pi \int_1^2 x(x-1)(x-2) dx = \frac{\pi}{2}.$$

三、解答题

1. 【参考解析】

矩阵 A 左乘矩阵等式, 有 $3B = AB - 5A$, 则 $AB - 3B - 5A + 15E - 15E = O$,

$$(A - 3E)B - 5(A - 3E) = 15E, \quad (A - 3E)(B - 5E) = 15E, \quad (A - 3E) \left[\frac{1}{15}(B - 5E) \right] = E,$$

$$\text{故} \quad (A - 3E)^{-1} = \frac{1}{15}(B - 5E).$$

2. 【参考解析】

$$\begin{aligned} \text{因为} \quad \sin A + \sin B + \sin C &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}, \quad \text{所以} \end{aligned}$$

$$\sum \frac{\sin A}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \sum \frac{\cos \frac{A}{2} \sin A}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \sum \frac{4 \sin A \cos \frac{A}{2}}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{4}{a+b+c} \sum a \cos \frac{A}{2}.$$

不妨设 $a \geq b \geq c$, 则 $\cos \frac{A}{2} \leq \cos \frac{B}{2} \leq \cos \frac{C}{2}$, 于是, 应用切比雪夫不等式及常见三角不等式

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{得}$$

$$\sum a \cos \frac{A}{2} \leq \frac{1}{3} \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right) (a+b+c) \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} (a+b+c) = \frac{\sqrt{3}}{2} (a+b+c),$$

$$\text{所以 } \frac{\sin A}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{\sin B}{\cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}} + \frac{\sin C}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} \leq \frac{4}{a+b+c} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (a+b+c) = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\sin A}{\cos \frac{B+C}{2} + \cos \frac{B-C}{2}} + \frac{\sin B}{\cos \frac{C+A}{2} + \cos \frac{C-A}{2}} + \frac{\sin C}{\cos \frac{A+B}{2} + \cos \frac{A-B}{2}} \right) \leq 1.$$

3. 【参考解析】

$$(1) \text{ 解方程组 } \begin{cases} y = nx + \frac{1}{n} \\ y = (n+1)x + \frac{1}{n+1} \end{cases}, \text{ 可得交点坐标为 } \left(\frac{1}{n(n+1)}, \frac{2n+1}{n(n+1)} \right),$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{1}{n(n+1)}, \text{ 所以 } V_n = \pi \int_0^{\frac{1}{n(n+1)}} \left(\left(nx + \frac{1}{n} \right)^2 - \left((n+1)x + \frac{1}{n+1} \right)^2 \right) dx = \frac{(4n+2)\pi}{3n^3(n+1)^3}.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{a_n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n+2)\pi}{3n^{3-k}(n+1)^{3-k}}, \text{ 则 } 6-2k=1, k=\frac{5}{2}, \text{ 此时}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{a_n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n+2)\pi}{3n^{3-k}(n+1)^{3-k}} = \frac{4\pi}{3}.$$