

2024 年第七届华教杯全国大学生数学竞赛

初赛试题（非数学类专业组）

☆注 意 事 项☆

1. 参赛对象：全国在校大学生（包括本科生，研究生及专科生）均可报名参赛
2. 竞赛官网：www.cecmath.com
3. 竞赛组别：非数学类专业组、数学类专业组、专科生组
4. 因试题整理时间有限，如在使用过程中发现编辑、题目错误等情况，请与我们联系修正。
5. 联系电话：13248083435（微信同号）；联系QQ：3007715383



竞赛官网



微信公众号



参赛咨询微信

一、选择题（共 10 题，3 分/题）

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} \right)$ 的值为 ().

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

2. 设函数 $f(x) = x(x-2)(x-3)(x-5)$, 则方程 $f'(x) = 0$ 在 $(0,3)$ 内的实数根个数为 ().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 设 $[f(x)]^2 = \int_0^x [f^2(t) + (f'(t))^2] dt + 2024$, 则 $f(x) =$ ().

- A. $2024e^{-x}$ B. $2024e^x$ C. $\pm \sqrt{2024}e^x$ D. $\pm \sqrt{2024}e^{-x}$

4. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t |\sin t| dt}{\pi x^2} =$ ().

- A. $\frac{1}{\pi^2}$ B. $\frac{1}{\pi}$ C. 0 D. π

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^k \sin \frac{3}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 若其导函数在 $x=0$ 处连续, 则 k 的范围是 ().

- A. $k \leq 2$ B. $k > 2$ C. $k > 1$ D. $k \geq 1$

6. 设极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3a}{x-a} \right)^{\frac{x}{2}} = 9$, 则常数 a 等于 ().

- A. 0 B. $\ln 2$ C. $\ln 3$ D. $2 \ln 2$

7. 设 $f(x)$ 满足 $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$, 其中 a, b, c 为常数, $|a| \neq |b|$, 则 $f'(x) =$ ().

- A. $\frac{a}{a^2-b^2} \left(-\frac{c}{x^2} + b \right)$ B. $\frac{c}{a^2-b^2} \left(-\frac{a}{x^2} - b \right)$
C. $\frac{b}{a^2-b^2} \left(-\frac{a}{x^2} + c \right)$ D. $\frac{c}{a^2-b^2} \left(\frac{a}{x^2} + b \right)$

8. 定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx < (\quad)$.

- A. $\frac{1}{2n+3}$ B. $\frac{1}{2n+2}$ C. $\frac{1}{2n+1}$ D. $\frac{1}{2n}$

9. 已知函数 $g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos 2tx dt$, 且 $g(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 则 $g(x) = (\quad)$.

- A. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}$ C. $\frac{\sqrt{\pi}}{2} (e^{-x^2} - 1)$ D. $e^{-x^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

10. $\iiint_{\Omega} (y-z) \arctan z dx dy dz = (\quad)$, 其中 $\Omega: x^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1$.

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. 1 D. 0

二、填空题（共 7 题，4 分/题）

1. 设 $f(x)$ 连续, 在 $x=1$ 处可导, 当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(1+\sin x) - 2f(1-\sin x) = 6x + o(x)$, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为_____.

华教杯全国大学生数学竞赛
HUA JIAO BEI QUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI

2. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (e^{\cos x} - e^{-\cos x}) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 微分方程 $y' - y \tan x = \sec x$ 的通解是_____.

4. 设 $f(x) = e^x + e^x \int_0^x f^2(t) dt$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 在第一象限的弧长是_____.

6. 设 $f(x)$ 可微, 且满足 $x = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t-x) dt$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 设 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 则 $\iint_D \frac{dx dy}{1 - x^2 y^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题（共 3 题，14 分/题）

1. 已知函数 $f(x)$ 与其一阶导数 $f'(x)$ 的和等于 $2e^x$, 且 $f'(x) + f''(x) = 2y$, 求 $f(x)$ 的函数关系式并确定 $y = f(x^2) \cdot \int_0^x f(-t^2) dt$ 的拐点坐标.

2. 若 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) \sim ax$, $1 - g(x) \sim bx^2$ 且 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$, 证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + xf(x)} - g(x)}{xf(x)} = \frac{1}{n} + \frac{b}{a}$.

华教杯全国大学生数学竞赛

HUA JIAO BEI QUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI

3. 设 $g(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 的某一领域上连续, 且 $f(x, y) = |x - y|g(x, y)$.

(1) 当 $g(x, y)$ 满足什么条件时? $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$ 存在.

(2) 当 $g(x, y)$ 满足什么条件时? $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

参 考 答 案

一、选择题

1、B

【参考解析】

利用夹逼准则进行适当的放大和缩小

$$\frac{n(n+1)}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n(n+1)}{n^2}$$

$$\text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1, \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} \right) = 1.$$

2、B

【参考解析】

显然 $f(0) = f(2) = f(3) = f(5) = 0$ ，所以在区间 $(0,2)$ $(2,3)$ $(3,5)$ 符合罗尔定理的三个条件，所

以 $f'(x) = 0$ 在区间 $(0,3)$ 内至少有两个实数根，再由 $f(x) = x(x-2)(x-3)(x-5)$ 是四次多项式函

数，故 $f'(x) = 0$ 是三次方程有且仅有三个实数根，综上所述 $f'(x) = 0$ 在区间 $(0,3)$ 内有两个实数根.

华教杯全国大学生数学竞赛

HUA JIAO BEI QUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI

3、C

【参考解析】

$$\text{令 } f(x) = y, \Rightarrow 2yy' = y^2 + (y')^2 \Rightarrow y = ce^x, [f(0)]^2 = 2024 \Rightarrow f(0) = \pm\sqrt{2024} = c$$

$$\Rightarrow f(x) = \pm\sqrt{2024}e^x.$$

4、A

【参考解析】

$$S(x) = \int_0^x t \cdot |\sin t| dt, S'(x) \geq 0 (x \geq 0), S(x) \text{ 单调递增, 当 } n\pi \leq x \leq (n+1)\pi \text{ 时,}$$

$$\text{有 } S(n\pi) \leq S(x) \leq [(n+1)\pi].$$

$$S(n\pi) = \int_0^{n\pi} x |\sin x| = n^2\pi, \text{ 同理 } S[(n+1)\pi] = (n+1)^2\pi, \text{ 得 } \frac{n^2\pi}{(n+1)^2\pi^2} \leq \frac{S(x)}{x^2} \leq \frac{(n+1)^2\pi}{n^2\pi^2}$$

当 x 趋于无穷时得 $\frac{S(x)}{x^2} = \frac{1}{\pi}$, 故原极限得 $\frac{1}{\pi^2}$.

5、B

【参考解析】

当 $k > 1$ 时, 有

$$f'(x) = \begin{cases} kx^{k-1} \sin \frac{3}{x} - 3x^{k-2} \cos \frac{3}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

显然当 $k > 2$ 时, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$.

6、C

【参考解析】

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3a}{x-a} \right)^{\frac{x}{4a}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4a}{x-a} \right)^{\frac{x-a}{4a} \cdot \frac{2ax}{x-a}} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4a}{x-a} \right)^{\frac{x-a}{4a}} \right]^{\frac{2ax}{x-a}} = e^{2a} = 9$$

所以 $a = \ln 3$.

华教杯全国大学生数学竞赛

HUA JIAO BEI QUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI

7、B

【参考解析】

$$af'(x) - \frac{b}{x^2} f'(\frac{1}{x}) = -\frac{c}{x^2}, \quad af'(\frac{1}{x}) + bx^2 f'(x) = -cx^2$$

$$\text{两边联立得 } f'(x) = \frac{c}{a^2 - b^2} \left(-\frac{a}{x^2} - b \right).$$

8、D

【参考解析】

$$t = \tan x, \text{ 则 } x = \arctan t, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt < \int_0^1 \frac{t^n}{2t} dt = \frac{1}{2n}.$$

9、B

【参考解析】

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} (e^{-t^2} \cos 2xt) dt = -2xg(x), \text{ 由上式得 } \frac{g'(x)}{g(x)} = -2x,$$

$$g'(x) = -2xg(x) \Rightarrow g(x) = ce^{-x^2} \quad g(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \text{ 所以 } g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}.$$

10、D

【参考解析】

$$\text{令 } x=u, v=y-z, \iint_{u^2+v^2 \leq 4} v du dv = 0 \text{ 所以 } \iiint_{\Omega} (y-z) \arctan z dx dy dz = 0.$$

二、填空题

1、 $y = 2(x-1)$

【参考解析】

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, $f(1+\sin x) - 2f(1-\sin x) \sim f(1+x) - 2f(1-x)$

$$\therefore \frac{f(1+\sin x) - 2f(1-\sin x)}{x} \sim \frac{f(1+x) - 2f(1-x)}{x} = 6 + \frac{o(x)}{x}, \text{ 两边取极限得}$$

$f'(1) = 2$ 且 $f(1) = 0$, 故切线方程为 $y = 2(x-1)$.

2、 0

【参考解析】

$$\text{令 } x = \frac{\pi}{2} + t, \text{ 则 } \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (e^{\cos x} - e^{-\cos x}) dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (e^{-\sin t} - e^{\sin t}) dt = 0.$$

3、 $y = \frac{x+C}{\cos x}$

【参考解析】

一阶线性微分方程 $y' - y \tan x = 0$ 的解是 $y = \frac{C}{\cos x}$, 由常数变易法

令 $y = u \sec x$ 带入方程得 $u = x + C$ ，故原方程的解为： $y = \frac{x+C}{\cos x}$ 。

4、 $\underline{f(x) = \frac{2e^x}{3-e^{2x}}}$

【参考解析】

原式可化为 $\frac{f(x)}{e^x} = 1 + \int_0^x f(t)dt$ 两边对 x 求导得 $\frac{(f'(x)-f(x))}{e^x} = f^2(x)$

整理后 $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' + \frac{1}{f(x)} = -e^x$ ，解得 $f(x) = \frac{2e^x}{2C - e^{2x}}$ ，将 $f(0) = 1$ 。代入得 $C = \frac{3}{2}$

$$f(x) = \frac{2e^x}{3 - e^{2x}}.$$

5、 $\underline{\frac{3a}{2}}$

【参考解析】

$x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ， $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ ，得

$$ds = 3a \sin t \cos t dt. \text{ 弧长 } L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \sin t \cos t dt = \frac{3a}{2}.$$

6、 $\underline{\cos x - \sin x}$

【参考解析】

$\int_0^x tf(t-x)dt = \int_{-x}^0 tf(t)dt + x \int_{-x}^0 f(t)dt$ ，故题中等式可化为

$$x = \int_0^x f(t)dt + \int_{-x}^0 tf(t)dt + x \int_{-x}^0 f(t)dt,$$

两边对 x 求导，并整理得

$$f(x) + \int_{-x}^0 f(t)dt = 1,$$

再求导得 $f'(x) + f(-x) = 0$ 。再求导得 $f''(x) - f'(-x) = 0$

即得 $f''(x) + f(x) = 0$, 解得 $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

又 $f(0) = 1; f'(0) = -1 \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = -1$, 即 $f(x) = \cos x - \sin x$.

7、 $\frac{\pi^2}{8}$

【参考解析】

作变换 $x = \frac{\sin \theta}{\cos \varphi}, y = \frac{\sin \varphi}{\cos \theta}$, 则 $\sin^2 \theta = \frac{x^2(1-y^2)}{1-x^2y^2}, \sin^2 \varphi = \frac{y^2(1-x^2)}{1-x^2y^2}$,

当 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 时, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, 且 $\cos(\theta + \varphi) = \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}{1+xy} > 0$

因此 $0 < \theta + \varphi < \frac{\pi}{2}$, $J = \begin{vmatrix} \frac{\cos \theta}{\cos \varphi} & \frac{\sin \theta \tan \varphi}{\cos \varphi} \\ \frac{\sin \varphi \tan \theta}{\cos \theta} & \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} \end{vmatrix} = 1 - x^2 y^2$

$$\iint_D \frac{dx dy}{1-x^2 y^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\iint_D \frac{dx dy}{1-x^2 y^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi^2}{8}$$

此题也可以用幂级数及 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ 计算.

三、解答题

1、【参考解析】

1) 特征方程为 $r^2 + r - 2 = 0$, 特征根为 $r_1 = 1, r_2 = -2$, 齐次微分方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$

的通解为 $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. 再由 $f'(x) + f(x) = 2e^x$ 得 $2C_1 e^x - C_2 e^{-2x} = 2e^x$, 可知

$C_1 = 1, C_2 = 0$.

故 $f(x) = e^x$

2) 曲线方程为 $y = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$, 则 $y' = 1 + 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$, $y'' = 2x + 2(1 + 2x^2)e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$

令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$ 。为了说明 $x = 0$ 是 $y'' = 0$ 唯一的解, 我们来讨论 y'' 在 $x > 0$ 和 $x < 0$ 时的符号。

当 $x > 0$ 时, $2x > 0, 2(1 + 2x^2)e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt > 0$, 可知 $y'' > 0$; 当 $x < 0$ 时,

$2x < 0, 2(1 + 2x^2)e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt < 0$, 可知 $y'' < 0$ 。可知 $x = 0$ 是 $y'' = 0$ 唯一的解。

同时, 由上述讨论可知曲线 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$ 在 $x = 0$ 左右两边的凹凸性相反, 可知 $(0, 0)$ 点是

曲线 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$ 唯一的拐点。

2、【参考解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + xf(x)} - g(x)}{xf(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + xf(x)} - g(x)}{ax^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + xf(x)} - 1}{ax^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - g(x)}{ax^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + xf(x)} - g(x)}{xf(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n}xf(x)}{ax^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx^2}{ax^2} = \frac{1}{n} + \frac{b}{a}.$$

3、【参考解析】

(1) 根据二元函数单侧偏导数的定义, 有

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0^+, 0)} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x| \cdot g(\Delta x, 0) - 0 \cdot g(0, 0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x \cdot g(\Delta x, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} g(\Delta x, 0) = g(0, 0). \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0^-, 0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x| \cdot g(\Delta x, 0) - 0 \cdot g(0, 0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x \cdot g(\Delta x, 0)}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} g(\Delta x, 0) = -g(0, 0). \text{ 于是, 当 } \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0^+, 0)} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0^-, 0)} \text{ 时, } f'_x(0, 0) \text{ 存}$$

在, 即 $g(0, 0) = 0$ 时, 有 $f'_x(0, 0)$ 存在, 同理 $f'_y(0, 0)$ 存在. 即当 $g(0, 0) = 0$ 时, $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$

也存在.

(2) 根据二元函数可微的定义可知: $f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0)\Delta x - f'_y(0, 0)\Delta y$

$$= \{ \Delta x - \Delta y | g(\Delta x, \Delta y) - g(\Delta x, 0)\Delta x - g(0, \Delta y)\Delta y \}$$

$$= \begin{cases} ([g(\Delta x, \Delta y) - g(\Delta x, 0)]\Delta x - [g(\Delta x, \Delta y) + g(0, \Delta y)]\Delta y) \\ - ([g(\Delta x, \Delta y) + g(\Delta x, 0)]\Delta x - [-g(\Delta x, \Delta y) + g(0, \Delta y)]\Delta y) \end{cases}$$

当 $\Delta x, \Delta y$ 系数要为零，且 $\Delta x = \Delta y \rightarrow 0$ ，有 $g(\Delta x, \Delta y) = g(\Delta x, 0) = g(0, \Delta y) = 0$ 。所以，当 $g(0, 0) = 0$ 时， $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微。



华教杯全国大学生数学竞赛

HUA JIAO BEI QUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI