华教杯全国大学生数学竞赛
HUA JIAO BEI QUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI

2024 年第七届华教杯全国大学生数学竞赛

初赛试题（专科生组）

☆ 注 意 事 项 ☆

1．参赛对象：全国在校大学生（包括本科生，研究生及专科生）均可报名参赛

2．竞赛官网：www.cecmath.com

3．竞赛组别：非数学类专业组、数学类专业组、专科生组

4．因试题整理时间有限，如在使用过程中发现编辑、题目错误等情况，请与我们联系修正。

5．联系电话：13248083435（微信同号）；联系QQ：3007715383

竞赛官网　　微信公众号　　参赛咨询微信

一、选择题（共 10 题，3 分/题）

1．函数 $f(x)=\arcsin(2-x)+\ln\dfrac{2+x}{2-x}$ 的定义域是（　　）．

A．$[1,2]$　　B．$(1,2)$　　C．$(-1,2)$　　D．$[1,2)$

2．设函数 $f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ -1 & x\notin Q\end{cases}$，则下列说法正确的是（　　）．

A．$f(x)$ 不是周期函数　　B．$f(x)$ 是初等函数

C．$f(x)$ 是周期函数有最小正周期　　D．$f(x)$ 是周期函数没有最小正周期

3．设 $0<x_n<1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，则下列数列中无界的是（　　）．

A．$\left\{\tan\dfrac{\pi}{2x_n}\right\}$　　B．$\left\{\ln\dfrac{1}{x_n}\right\}$　　C．$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$　　D．$\{x_n^2\}$

4．$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-3})$ 的值为（　　）．

A．0　　B．1　　C．2　　D．4

5．关于极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-e^{1-x}}{1-\cos(1-x)}$，下列说法正确的是（　　）．

A．极限等于 0　　B．极限不存在　　C．极限等于 1　　D．极限等于 -1

6．极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{i}{2n^2+2i}=$（　　）．

A．0　　B．$\dfrac{1}{4}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．∞

7．定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{\cos x-\cos^3 x}-\dfrac{\sin^3 x}{x^4+1})dx=$（　　）．

A. 0　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{4}{3}$

8. 当$x\to\infty$时，$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$是（　　）.

A. 无穷小量　　B. 无穷大量

C. 有界且非无穷小量　　D. 函数$1-\cos x$的等价无穷小量

9. 广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{2x^3}{e^{\sqrt{2x}}}dx=$（　　）.

A. ∞　　B. 2　　C. 3　　D. 0

10. 设$f(x)=7x-2\arctan\frac{1}{x-7}$，则$x=7$是$f(x)$的（　　）.

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点　　C. 无穷间断点　　D. 振荡间断点

二、填空题（共 7 题，4 分/题）

1. 当$x\to 0$时，$\sqrt[5]{1+ax^2}-1$与$\cos x-1$是等价无穷小，则$a=$________.

2. 函数$f(x)=\frac{x}{x+2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$的无穷间断点是$x=$________.

3. 极限$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{2+e^x}{3})^{\cot x}=$________.

4. $f(x)=\arctan x$，则$f^{(n)}(0)=$________.

5. 设$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内二阶可导，且$f''(x)>0, f(0)=0$，则对$\forall x_1,x_2>0$，恒有$f(x_1+x_2)$________（填$<,=,>$）$f(x_1)+f(x_2)$.

6．曲线$\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$在$t=\dfrac{\pi}{3}$处的法线方程为__________.

7．已知$f^{'}(e^x)=xe^{-x}$且$f(1)=0$，则$f(x)=$__________.

三、解答题（共 3 题，14 分/题）

1．求极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x \sqrt{x-t}e^t dt}{2x\sqrt{x}}$.

2．设函数$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=k\tan x^3$在$x\to 0$时为等价无穷小量，求常数$a,b,k$的取值.

3．已知一模具底面 D 是封闭曲线$r=\dfrac{2024t}{1+t^2},\theta=\dfrac{\pi t}{1+t}$所围成平面图形，模具的高等于 5 厘米，求该模具的体积.

参 考 答 案

一、选择题

1、D

【参考解析】

根据反正弦函数的概念及定义域得 $-1 \le 2-x \le 1$，即 $1 \le x \le 3$；

根据对数函数的性质 $\dfrac{2+x}{2-x} > 0$ 得 $-2 < x < 2$；

再取二者交集即 $\{x \mid 1 \le x < 2\}$，故选项 D 正确.

2、D

【参考解析】

初等函数的定义，该分段函数不是初等函数排除选项 B；结合 $f(x+l) = f(x)$，由题目可知所有的有理数都是该函数的周期，但是没有最小的正有理数，所以是周期函数没有最小正周期，故选项 A 和选项 C 错误，选项 D 正确.

3、A

【参考解析】

令 $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ 选项 B、选项 C 和选项 D 数列趋于无穷时都存在极限，所以有界，而选项 A 的极限为 $+\infty$，故为无界数列.

4、C

【参考解析】

分子有理化 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-3}) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-3})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-3})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-3}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-3}} = 2$.

5、 B

【参考解析】

由等价无穷小替换法得：

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-e^{1-x}}{1-\cos(1-x)}\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\frac{(1-x)^2}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{1-x}=\infty$$，所以极限 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-e^{1-x}}{1-\cos(1-x)}$ 不存在.

6、B

【参考解析】

$$\because \frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\le\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\le\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n}\le\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\le\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}$$

由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{4}$.

7、D

【参考解析】

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{x^4+1}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin xdx$$

$$=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}d\cos x=\frac{4}{3}.$$

8、A

【参考解析】

由等价无穷小替换法得：$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\leftrightarrow\frac{1}{x^2}(x\to\infty)$，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$，故选 A.

9、C

【参考解析】

$$\int_0^{+\infty}2x^3e^{-\sqrt{2}x}dx=\frac{2}{4}\int_0^{+\infty}(\sqrt{2}x)^3e^{-\sqrt{2}x}d\sqrt{2}x=\frac{2}{4}\int_0^{+\infty}(u)^3e^{-u}du=\frac{2}{4}\Gamma(4)=\frac{12}{4}=3.$$

10、B

【参考解析】

$\lim\limits_{x\to 7^+} f(x)=49-2\lim\limits_{x\to 7^+}\arctan\dfrac{1}{x-7}=49-\pi$，$\lim\limits_{x\to 7^-} f(x)=49-2\lim\limits_{x\to 7^-}\arctan\dfrac{1}{x-7}=49+\pi$

符合跳跃间断点定义，故选择 B.

二、填空题

1、 $\underline{\quad -\dfrac{5}{2}\quad}$

【参考解析】

当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[5]{1+ax^2}-1\sim\dfrac{ax^2}{5}$，$\cos x-1\sim-\dfrac{x^2}{2}$，而

$\sqrt[5]{1+ax^2}-1\sim\cos x-1$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{ax^2}{5}}{-\frac{x^2}{2}}=1$，即 $a=-\dfrac{5}{2}$.

2、 $\underline{\quad -2\quad}$

【参考解析】

$f(x)=\dfrac{x}{x+2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{x}{(x+2)|x|}\sqrt{1+x^2}$，无定义的点是 $x=-2$ 和 $x=0$，

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\dfrac{1}{2}$，故 $x=0$ 是函数的第一类跳跃间断点；$x=-2$，$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$，

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty$，故 $x=-2$ 是函数的第二类无穷间断点.

3、 $\underline{\quad e^{\frac{1}{3}}\quad}$

【参考解析】

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^x}{3}\right)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{e^x-1}{3}\right)^{\cot x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{3}\right)\cot x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{3\tan x}}=e^{\frac{1}{3}}$.

4、 $f^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^m(2m)! & n=2m+1\\ 0 & n=2m\end{cases} \quad m=0,1,2,\cdots$

【参考解析】

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\Rightarrow(1+x^2)f'(x)=1$，由莱伯尼兹求导法，两边对 x 求导，得

$(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0\Rightarrow f^{(n+1)}(0)=-n(n-1)f^{(n-1)}(0)$

由 $f(0)=0;f'(0)=1$ 即得结论.

5、 $>$

【参考解析】

不妨设 $0<x_1<x_2$。由拉格朗日中值定理，$\exists\xi_1\in(0,x_1),\xi_2\in(x_2,x_1+x_2)$，

使得 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_1)}{x_1}$ $.f'(\xi_2)=\dfrac{f(x_1+x_2)-f(x_2)}{x_1}$，而 $f''(x)>0,f'(x)$ 单调增，

$f''(\xi_1)<f'(\xi_2)$ 即 $f(x_1)<f(x_1+x_2)-f(x_2)$.

6、 $x-\sqrt{3}y+1=0$

【参考解析】

$\dfrac{dx}{dt}=-3\cos^2 t\sin t\Big|_{t=\frac{\pi}{3}}=-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ ，$\dfrac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t\Big|_{t=\frac{\pi}{3}}=\dfrac{9}{8}$

$\therefore\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{3}}=-\sqrt{3}$，故法线的斜率为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. 法线过点 $(\dfrac{1}{8},\dfrac{3\sqrt{3}}{8})$

可得法线方程为：$x-\sqrt{3}y+1=0$.

7、 $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

【参考解析】

$f'(e^x)=xe^{-x}$，令 $u=e^x$，则 $f'(u)=\dfrac{\ln u}{u}\Rightarrow f(u)=\int\dfrac{\ln u}{u}du=\dfrac{1}{2}(\ln u)^2+C$

$f(1)=0 \Rightarrow C=0$，从而 $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

三、解答题

1、【参考解析】

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sqrt{x-t}e^t dt}{2x\sqrt{x}}$，令 $x-t=u$，则有

$\int_0^x \sqrt{x-t}e^t dt=\int_x^0 \sqrt{u}e^{x-u}d(-u)=\int_0^x \sqrt{u}e^{x-u}du$

$\int_0^x \sqrt{x-t}e^t dt=\int_x^0 \sqrt{u}e^{x-u}d(-u)=\int_0^x \sqrt{u}e^{x-u}du$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sqrt{x-t}e^t dt}{2x\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x\int_0^x \sqrt{u}e^{-u}du}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sqrt{u}e^{-u}du}{2x^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}e^{-x}}{3x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{3}$$

2、【参考解析】

当 $x\to 0$ 时，把函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$ 展开到三阶的马克劳林公式，得

$$f(x)=x+a(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3))+bx(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))$$

$$=(1+a)x+(-\frac{a}{2}+b)x^2+(\frac{a}{3})x^3+o(x^3)$$

$g(x)=k\tan x^3$ 与 kx^3 是等价无穷小

由于当 $x\to 0$ 时，$f(x),g(x)$ 是等价无穷小，则有 $\begin{cases}1+a=0\\ -\frac{a}{2}+b=0\\ \frac{a}{3}=k\end{cases}$，

解得，$a=-1,b=-\frac{1}{2},k=-\frac{1}{3}$

3、【参考解析】

$$S_D=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}r^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^2(1+t)^2}dx$$

$$=2\pi 2024^2[-\frac{1}{4(1+t)}-\frac{1}{4}arc\cot t-\frac{1}{4+4t^2}]\Big|_2^{+\infty}$$

$$=2024^2(1-\frac{\pi}{4})\pi$$

$$V=\iint\limits_D 3dxdy=5\times S_D=2024^2(5-\frac{5\pi}{4})\pi$$