华教杯全国大学生数学竞赛
HUA JIAO BEI QUAN GUO DA XUE SHENG SHU XUE JING SAI

2023 年第六届华教杯全国大学生数学竞赛

决赛试题（数学类专业组）

☆ 注 意 事 项 ☆

1．参赛对象：全国在校大学生（包括本科生，研究生及专科生）均可报名参赛

2．竞赛官网：www.cecmath.com

3．竞赛组别：非数学类专业组、数学类专业组、专科生组

4．因试题整理时间有限，如在使用过程中发现编辑、题目错误等情况，请与我们联系修正。

5．联系电话：13248083435（微信同号）；联系QQ：3007715383

竞赛官网

微信公众号

参赛咨询微信

一、选择题（10 题、3 分/题）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n+\frac{1}{n}}+\dfrac{\ln(1+\frac{2}{n})}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\dfrac{\ln(1+\frac{n}{n})}{n+\frac{n}{n}}\right)=$（　　）.

A. $2\ln 2-1$　　B. $2\ln 3-1$　　C. $4\ln 2-1$　　D. $3\ln 2+1$

2. 函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{xy+2}+2x^2y, f(x,1)=1+x^2$，则 $f(x,y)=$（　　）.

A. $\ln(xy+2)+x^2y^2+y-\ln(x+2)$　　B. $\ln(xy+2)+x^2y^2+xy-\ln(y+2)$

C. $\ln(xy+2)+x^2+xy-\ln(x+2)$　　D. $\ln(xy+2)+x^2y^2+1-\ln(x+2)$

3. 设 $|\alpha|<1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n!\sin\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha}{3}\cdots\sin\dfrac{\alpha}{n}$（　　）.

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛　　C. 发散　　D. 收敛性与 α 的取值有关

4. 设 $div(grad u)-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，且 $u(x,2x)=x, u_x'(x,2x)=x^2$，则 $u(x,y)=$（　　）.

A. $\dfrac{1}{2}(x-y)^3+108(x+y)^3+\dfrac{1}{4}y$　　B. $\dfrac{1}{4}(x-y)^3+\dfrac{1}{108}(x+y)^3+\dfrac{1}{4}y$

C. $\dfrac{1}{4}(x-y)^3+108(x+y)^3+\dfrac{1}{2}y$　　D. $\dfrac{1}{4}(x-y)^3+\dfrac{1}{108}(x+y)^3+\dfrac{1}{2}y$

5. 直线 $L_1:\begin{cases}x=-1+2t\\ y=2+3t\\ z=2t-3\end{cases}$ 和直线 $L_2:\begin{cases}2y-4z+3=0\\ 4x-2y-11=0\end{cases}$ 所在的平面的方程为（　　）.

A. $x-z-2=0$　　B. $2y-3z+5=0$　　C. $3x-2y-11=0$　　D. 不存在

6. 设 Ω 为球心在原点，半径为 R 的上半球，Ω_1 为半球在第一卦限内的部分，则（　　）.

A. $\iiint\limits_{\Omega} xdv = 4\iiint\limits_{\Omega_1} xdv$　　B. $\iiint\limits_{\Omega} ydv = 4\iiint\limits_{\Omega_1} ydv$

C. $\iiint\limits_{\Omega} zdv = 4\iiint\limits_{\Omega_1} zdv$　　D. $\iiint\limits_{\Omega} xydv = 4\iiint\limits_{\Omega_1} xydv$

7．设 $f(x)=x^n e^{-x^2}$，则 $f^{(n)}(0)=$（　　）．

A．$(n-1)!$　　B．$n!$　　C．$(n+1)!$　　D．1

8．函数 $f(x)=\begin{cases}4, x\in[-4,0)\\ 0, x\in[0,4)\end{cases}$ 在 $[-4,4)$ 的傅立叶级数在 $x=0$ 处收敛于（　　）．

A．0　　B．2　　C．1　　D．4

9．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则 $\left|-2\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & \boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}\right|=$（　　）．

A．$(-2)^n|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}^{-1}|$　　B．$-2|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{B}|$　　C．$-2|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}^{-1}|$　　D．$2^{2n}|A||B|^{-1}$

10．矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1\\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1\end{pmatrix}$ 的秩等于（　　）．

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

二、填空题（7题、4分/题）

1．已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-x, x\le\dfrac{1}{2}\\ x-\dfrac{1}{2}, x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$，$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx\sin n\pi x(n=1,2,\cdots)$，则

$S(-\dfrac{9}{4})=$________.

2．$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{x}{1+x}}{x^{-1}}=$________.

3．曲线 $(\frac{x}{2}+\frac{y}{4})^4=x^2-\frac{y^2}{4}(x\ge 0,y\ge 0)$ 与 x 轴所围区域的面积为________.

4．$f(x)=\lim\limits_{t\to x}(\frac{\sin t}{\sin x})^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$ 的第二类间断点为________.

5．某高校举办一年一度的大学生运动会，理学院决定选派 A、B 等 8 名大学生到 3 个场馆参加志愿服务，每位志愿者被分配到不同场馆是等可能的，要求每个场馆安排 2 人，则 A、B 两人不在同一场馆的概率为________.

6．已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=ce^{-x^2-x},-\infty<x<+\infty$，则 $c=$________.

7．一枚硬币上抛 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于________.

三、解答题（3 题、14 分/题）

1．已知 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\ \lambda&1&1\\ 1&\lambda&1\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，通过讨论参数 λ，判断方程组 $AX=b$ 是否有解？若有，求出通解.

2．求证：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}\frac{1}{\tanh(a\pi)}-\frac{1}{2a^2}(a\neq 0)$.

3．求密度为ρ的均匀圆柱体$x^2+y^2<1,|z|=1$对直线$L:x=y=z$的转动惯量.

参 考 答 案

一、选择题

1. 【答案】A

【参考解析】

原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\ln(1+\frac{k}{n})}{n+\frac{1}{k}}$，由于$\dfrac{1}{\mathrm{n}+1}<\dfrac{1}{n+\frac{1}{k}}<\dfrac{1}{n}$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\ln(1+\frac{k}{n})}{n}=\int_0^1\ln(1+x)dx=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\dfrac{x}{1+x}dx=2\ln2-1$.

2. 【答案】D

【参考解析】

$$f(x,y)=\int(\frac{x}{xy+2}+2x^2y)dy=\ln(xy+2)+x^2y^2+\varphi(x)$$

由$f(x,1)=1+x^2\Rightarrow\ln(x+2)+x^2+\varphi(x)=x^2+1\Rightarrow\varphi(x)=1-\ln(x+2)$

$f(x,y)=\ln(xy+2)+x^2y^2+1-\ln(x+2)$.

3. 【答案】A

【参考解析】

$\left|n!\sin\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha}{3}\cdots\sin\dfrac{\alpha}{n}\right|\le\left|\alpha^n\right|$,

由于$|\alpha|<1$，故原级数绝对收敛.

4. 【答案】D

【参考解析】

由$div(grad u)-2\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0\Rightarrow\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$，令$\xi=x-y,\eta=x+y$，则$\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=0$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\varphi(\xi), u=\int \varphi(\xi) d\xi+g(\eta)$$

所以 $u(x,y)=f(x-y)+g(x+y)$

由 $u(x,2x)=x \Rightarrow f(-x)+g(3x)=x$

所以 $u(x,y)=\frac{1}{4}(x-y)^3+\frac{1}{108}(x+y)^3+\frac{1}{2}y$.

5. 【答案】A

【参考解析】

将直线 L_1 代入到各个选项，需要恒成立。直线 L_2 方程通过加减消元消掉 y，所得方程与前者一致的，为所在平面的方程，故选 A.

6. 【答案】C

【参考解析】

根据积分区域的对称性，和被积函数的奇偶性可判断，选 C.

7. 【答案】B

【参考解析】

根据莱布尼茨求导公式可得，$f^{(n)}(x)=n!e^{-x^2}+\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k[x^n]^{(k)}(e^{-x^2})^{(n-k)}$，所以 $f^{(n)}(0)=n!$.

8. 【答案】B

【参考解析】

根据傅立叶收敛定理可得，$f(0)=\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=\frac{0+4}{2}=2$.

9. 【答案】D

【参考解析】

$$\left|-2\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}\right| = (-2)^{2n}\begin{vmatrix} A^T & O \\ O & B^{-1} \end{vmatrix} = 2^{2n}|A^T||B^{-1}| = 2^{2n}|A||B|^{-1}.$$

10. 【答案】C

【参考解析】

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$，所以秩等于 3，故选 C.

二、填空题

1. 【答案】$-\frac{1}{4}$

【参考解析】

$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}-x, 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ x-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$，先将 $f(x)$ 延拓成 $[-1,1]$ 上的奇函数，再延拓成周期为 2 的周期函数，则

$S(x)$ 是周期为 2 的奇函数的正弦函数展开式，由傅里叶级数的收敛定理，得

$$S(-\frac{9}{4}) = S(-\frac{1}{4}) = -S(\frac{1}{4}) = -f(\frac{1}{4}) = -(\frac{1}{2}-x)\Big|_{x=\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}.$$

2. 【答案】$\frac{1}{2}$

【参考解析】

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{1+x}}{x^{-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+(\frac{x}{1+x})^2}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(1+x)^2+x^2} = \frac{1}{2}.$$

3. 【答案】4

【参考解析】

令 $x=2r\cos^2\theta$， $y=4r\sin^2\theta$，则曲线为

$r^2=4(\cos^4\theta-\sin^4\theta)=4(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=4\cos(2\theta)$，

从而可知 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$，且 $0\le r\le 2\sqrt{\cos 2\theta}$.

又 $J=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\cos^2\theta & -4r\cos\theta\sin\theta\\ 4\sin^2\theta & 8r\sin\theta\cos\theta\end{vmatrix}=16r\cos\theta\sin\theta=8r\sin 2\theta$.

故由二重积分的几何意义与换元法，得所求面积 $A=\iint\limits_D d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sqrt{\cos 2\theta}}8r\sin 2\theta dr$

$=16\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2\theta\cos 2\theta d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2\theta d(\sin 2\theta)=8[\frac{1}{2}\sin^2 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}=4$.

4. 【答案】 $x=k\pi(k\neq 0)$

【参考解析】

$\lim\limits_{t\to x}(\dfrac{\sin t}{\sin x})^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}=\lim\limits_{t\to x}[(1+\dfrac{\sin t-\sin x}{\sin x})^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}}]^{\frac{x}{\sin x}}=e^{\frac{x}{\sin x}}$，因此函数 $f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}}$ 的间断点为 $x=k\pi$， $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点， $x=k\pi(k\neq 0)$ 是函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

5. 【答案】 $\dfrac{4}{7}$

【参考解析】

将 8 个志愿分成二组，然后安排到三个场馆工作，共有 $\dfrac{C_8^4C_4^4}{A_2^2}A_2^2=70$，A、B 两人被安排在一起，其它随机安排，共有 $C_2^1C_6^2=30$，则 A、B 两人不在同一场馆的概率为 $P=\dfrac{70-30}{70}=\dfrac{4}{7}$.

6. 【答案】 $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}}$

【参考解析】

将 $f(x)$ 变形为 $f(x)=ce^{-x^2-x}=ce^{\frac{1}{4}}e^{-(x-\frac{1}{2})^2}=ce^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}}$，这是服从正态分布的随机变量的概率密度，其中 $\mu=\frac{1}{2}$，$\sigma=\frac{1}{\sqrt{2}}$．再由 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}=ce^{\frac{1}{4}}$，则 $c=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}}$．

7．【答案】-1

【参考解析】

因为 $Y=n-X$，则 $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,n-X)}{\sqrt{DX}\sqrt{D(n-X)}}=\frac{\mathrm{cov}(X,n)-\mathrm{cov}(X,X)}{D(X)}=-1$．

三、解答题

1．【参考解析】

方程组的增广矩阵

$$(A,\ b)=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\ \lambda&1&1&1\\ 1&\lambda&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-\lambda r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\ 0&1-\lambda&1-\lambda&1-\lambda\\ 0&\lambda-1&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\ 0&1-\lambda&1-\lambda&1-\lambda\\ 0&0&1-\lambda&1-\lambda\end{bmatrix}.$$

（1）当 $\lambda\neq1$ 时，$R(A)=R(A,b)=3$，方程组有唯一解，且该唯一解为 $(0,0,1)^T$．

（2）当 $\lambda=1$ 时，$R(A)=R(A,b)=1$，方程组有无穷多解，选取 x_2，x_3 为自由未知量，并将它们移到方程右边，则有 $x_1=-x_2-x_3+1$，故

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_2-x_3+1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

故原方程的通解为 $X=c_1\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$（其中 c_1,c_2 为任意常数）．

2．【参考解析】

由 $f(x)=\cosh(ax)$ 在 $[-\pi,\ \pi]$ 的傅里叶级数为

$$\cosh(ax)=\frac{\sinh(a\pi)}{a\pi}+\frac{2a\sinh(a\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}\cos nx\,.$$

由傅里叶级数收敛定理知当 $x=\pi$ 时，

$$\cosh(a\pi)=\frac{\sinh(a\pi)}{a\pi}+\frac{2a\sinh(a\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}\,,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}\frac{1}{\tanh(a\pi)}-\frac{1}{2a^2}\,.$$

3．【参考解析】

$$d^2=\frac{\left|(1,1,1)\times(x,y,z)\right|^2}{3}=\frac{1}{3}\left[(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\right]$$

$$I=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}\rho\left[(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\right]dV$$

$$=\frac{2}{3}\rho\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV=\frac{4}{3}\rho\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy+\frac{4}{3}\rho\pi\int_0^1 z^2dz=\frac{10\pi\rho}{9}$$